تحلیل ناپایداری سطح مشترک بین دو سیال لزج میان دو استوانه هم مرکز درغیاب گرانش

سید علی اکبر پوراحمدی*
دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک تبدیل انرژی
دانشگاه صنعتی اصفهان

احمد صداقت
استادیار مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده: دراین مقاله ناپایداری خطی بین دو لایه سیال‌لزج در داخل دو استوانه هم مرکز را بصورت تحلیلی حل کرده و معادلات آنها را که پیچیده و طولانی هستند توسط کدنویسی در دو نرم افزار بوسیله فرمول و شکل بررسی می کنیم. این بررسی در حالت هیدرواستاتیکی و در حالتی که از اثر نسبت چگالی دو سیال و شعاع استوانه خارجی صرفنظر نشود انجام شده است و نتایج با نتایج مقاله‌های موجود در منابع مقایسه شده است. اروزکو و لویس در مقاله خود به بررسی مسئله ناپایداری دو طبقه سیال داخل دو استوانه هم مرکز پرداختند. آنها در بدست آوردن روابط خود، اثر نسبت چگالی دوسیال با محدودیت وارد کرده‌اند و این نسبت را بینهایت قرار دادند و همچنین اثر شعاع خارجی بی بعد نیز بعلت فرض بالا در نظر گرفته نشده است.

در این مقاله رابطه‌ای کلی‌تر برای ناپایداری مسئله مذکور بدست خواهیم آورد. بدین منظور رابطه‌ای برای حالت متقارن n=0 که n عدد موج سمتی است بدست آورده که این رابطه را بصورت ساده شده نشان می دهیم و برای حالت‌کلی نیز با هر n رابطه‌ای پیچیده بدست آوردیم، از این جهت از آوردن آن خودداری‌کرده و فقط به نمودارهای حاصل از آن بسنده می کنیم.اگر سیال سنگین‌تر در تماس با استوانه خارجی باشد به علت نیروی گریز از مرکز این سیستم پایدار هیدرواستاتیکی است و اگر آن سیال در تماس استوانه داخلی باشد این سیستم ناپایدار می شود این قانون توسط عبارات بدست آمده تصدیق می شود.

واژه‌های کلیدی: : ناپایداری خطی، استوانه های هم مرکز، ماکزیمم نرخ رشد، کشش سطحی

۱. مقدمه

موضوع ناپایداری سیال داخل یک استوانه حدود یک قرن پیش توسط رینولدز بررسی شده است ودر کتاب چاندراسخار[۱] در بحث جتها نشان داده شده است . رایلی[2] نیز در مورد این پدیده تحقیق کرده است و کاهش سیرکولاسیون با شعاع را شرط لازم ناپایداری بدست آورده است.در مطالعه ای دیگراثر کشش سطح و چرخش توسط هکینگ و مایکل[۳] در نظر گرفته شد آنها یک حل تحلیلی برای نرخ رشد وطول موج سمتی آشفتگیهای یک ستون آب تحت چرخش بدست آوردند. ایح[۴] روی ناپایداری یک لایه سیال نازک روی یک سیلندر افقی چرخان تمرکز کرد وی نشان داد عدد موج بحرانی به کشش سطح و عدد رینولدز بستگی دارد . هکینگ[۵] ناپایداری یک ستون سیال تحت چرخش بصورت صلب را شرح داد. پدلی[۶] ناپایداری جریان مارپیچی را روی سطح آزاد سیلندر در داخل وخارج بدست آورد.جوزف[۷] پایداری سیالات ویسکوزرا بصورت طبقه ای داخل استوانه چرخان بدست آورد.ویدمن[۸] پایداری دو طبقه سیال ویسکوز را در داخل یک استوانه محاسبه کرد.او نتایج قبلی را که بررسی روی یک سیال بود هماهنگ کرد.او همچنین در مقاله ای دیگر حل عددی کاملی از مسئله خطی دو طبقه سیال ویسکوز در یک سیلندررا بدست آورد.هواشودو[۹] در سال ۲۰۰۷ در مقاله خود از تئوری گرادیان انرژی برای مطالعه ناپایداری تیلور کوئت بین سیلندرهای هم مرکز استفاده کرد.

* مؤلف مکاتبه کننده
پست الکترونیکی: sa.pourahmadi@iut.ac.ir

اروزکو و لویس[10] در مقاله خود به بررسی مسئله نا پایداری دوطبقه سیال داخل دو استوانه هم مرکز پرداختند و روابطی برای آن با گرفتن محدودیتهایی بدست آوردند. در روابط آنها برای بدست آوردن رابطه موجود در مقاله، اثر نسبت چگالی دوسیال با محدودیت وارد شده است و این نسبت را بینهایت قرار دادند و همچنین اثر شعاع خارجی بی بعد نیز بعلت فرض بالا در نظر گرفته نشده است.

ما در این مقاله خواستار بدست آوردن رابطه ای کلی تر برای نا پایداری در حالت کلی مسئله مذکور هستیم برای این ادعا در بخش اصلی رابطه ای برای حالت متقارن n=0 بدست آورده که این رابطه را بصورت ساده شده نشان می دهیم وبرای حالت کلی نیز با هر n رابطه ای بزرگ وپیچیده بدست آوردیم ،از این جهت از آوردن آن خودداری کرده و فقط به نمودارهای حاصل از آن بسنده می کنیم.اگر سیال سنگین تر در تماس با استوانه خارجی باشد به علت نیروی گریز از مرکز این سیستم پایدار هیدرواستاتیکی است و اگر آن سیال در تماس استوانه داخلی باشد این سیستم ناپایدار می شود در آخر ما قانون فوق را توسط عبارات بدست آمده خود تصدیق خواهیم کرد.

۲. معادلات حرکت :

در این مسئله ناپایداری دو سیال ویسکوز چرخان که مانند یک جسم صلب بین دو سیلندر هم مرکز قرار داده شده اند بررسی می شود و از اثر جاذبه در این مسئله صرفنظر می شود. شکلی از این سیستم در شکل ۱ کشیده شده است. درمقایسه با مقاله ویدمن سیلندر داخلی با شعاع r=c است و شعاع سیلندر خارجی r=b است . سیالات دانسیته ثابت ρ_i دارند که 2 و i=1 بترتیب برای سیال داخلی و خارجی است. سرعت زاویه ای سیستم $\Omega = \Omega \ e_z$است. که Ω بزرگی بردار سرعت خارجی و e_z بردار واحد در جهت محور است بردارهای واحد دیگر در جهتهای شعاعی و سمتی e_r و e_θ است. ثابت کشش سطح γاست.

معادله حرکت در مختصات استوانه ای یک سیال ویسکوز در یک سیستم چرخان در زیر نوشته شده است :

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho_i}\nabla p_i + \nabla\left[\frac{(\Omega \times r)^2}{2}\right] \qquad (۱)$$

و معادله غیر قابل تراکم:

$$\nabla . u_i = 0 \qquad (۲)$$

اینجا $\bar{r}$ بردار شعاعی وr بزرگی آن و بردار $\overline{U_i} = (U_i و V_i و W_i)$ بردار سرعت است. متغیرهای زمان با Ω^{-1} و طول با شعاع سطح a و سرعت با $a\Omega$ و فشار با $pa^2\Omega^2$ بی بعد می شوند.

به این روش معادلات حرکت دو سیال ممکن است به این روش نوشته شود :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\bar{u}_i.\nabla)u_i - 2V_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{p_i - \lambda^{2-1}}{2}r^2\right] \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + (\bar{u}_i.\nabla)V_i - \frac{u_i V_i}{r} + 2u_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}}\frac{1}{r}\frac{\partial p_i}{\partial \theta} \qquad (۴)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + (\bar{u}_i.\nabla)W_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}}\frac{\partial p_i}{\partial z} \qquad (۵)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_i) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_i}{\partial \theta} + \frac{\partial W_i}{\partial z} = 0 \qquad (۶)$$

که $\lambda = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ نسبت دانسیته است واپراتور نابلا در مختصات استوانه ای

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial}{\partial z} e_z \qquad (۷)$$

اگر ما سطح را توسط بی بعد سازی در r=1 قرار دهیم سیلندر خارجی در $r = k_2 = \frac{b}{a}$ و سطح سیلندر داخلی در $r = k_1 = \frac{c}{a}$ قرار می گیرند از این برای محاسبه بردار قرار خواهند گرفت آشفتگی ها در سطح در $r = 1 + \eta(\theta, z, t)$

نرمال در سطح استفاده می شود. داریم :

$$\overline{n} = \frac{e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial \eta}{\partial z} e_z}{\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial \eta}{\partial \theta})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial z})^2}} \qquad (۸)$$

بنابراین شرایط مرزی هستند :

$$r = k_1 \quad \text{در} \quad p = p_0 \qquad (۹)$$

$$r = k_1 \quad \text{در} \quad u_1 = 0 \qquad (۱۰)$$

$$r = k_2 \quad \text{در} \quad u_2 = 0 \qquad (۱۱)$$

که p_0 یک فشار رفرنس در سطح سیلندر داخلی است. پیوستگی سرعتهای شعاعی در سطح باید توسط شرایط مرزی سینماتیکی ارضا شوند.

$$U_i - (\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{V_i}{r}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + W_i \frac{\partial \eta}{\partial z}) = 0 \quad \text{در} \quad r = 1 + \eta \qquad (۱۲)$$

فشار ناپیوسته در سطح به علت کشش سطحی می تواند بوسیله یک معادله تعادل برای تنشهای نرمال تشریح شود.

$$p_2 - p_1 = L_2 \nabla . n \quad \text{در} \quad r = 1 + \eta \qquad (۱۳)$$

در حالت هیدرواستاتیک سیستم مانند یک جسم صلب می چرخد و فشار از راه هر سیال ارضا می شود:

$$p_{01} = p_0 + \frac{1}{2}\lambda(r^2 - k_1^2) \qquad k_1 \le r \le 1 \qquad (۱۴)$$

$$p_{02} = p_0 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{\lambda - 1}{2} - \frac{1}{2}\lambda k_1^2 - L_2 \quad 1 \le r \le k_2 \qquad (۱۵)$$

که $L_i = \frac{\gamma}{p_i \Omega^2 a^3}$ به عنوان نسبت نیروی کشش سطح به نیروی گریز از مرکز سیال i=1 یا i=2 محاسبه شده در سطح تعریف می شود. این تعریف معکوس عدد گریز از مرکزی باند است با بکار بردن آشفتگی های کوچک روی سرعت و فشار و تغییر شکل سطح به ترتیب با u_i' و p_i' و n' معادلات شرایط مرزی را می توانیم خطی کنیم. در این روش حالت هیدرواستاتیک سیستم بصورت زیر آشفته می شود:

$$\begin{pmatrix} \overline{u}_i \\ p_i \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{oi} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{u}_i' \\ p_i' \\ n' \end{pmatrix} \qquad (۱۶)$$

بعد از جانشین در معادله(6)-(3) و کاهش جواب هیدرواستاتیک و خطی کردن معادلات ارضا شده توسط آشفتگیها در هر ناحیه سیال داریم :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} - 2V_i' = -\frac{1}{\lambda^{2-i}}\frac{\partial p_i'}{\partial r} \qquad (۱۷)$$

$$\frac{\partial V_i'}{\partial t} - 2u_i' = -\frac{1}{\lambda^{2-i}} \frac{1}{r} \frac{\partial p_i'}{\partial r} \qquad (۱۸)$$

$$\frac{\partial W_i'}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda^{2-i}} \frac{\partial p_i'}{\partial z} \qquad (۱۹)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_i') + \frac{1}{r}\frac{\partial V_i'}{\partial \theta} + \frac{\partial W_i'}{\partial z} = 0 \qquad (۲۰)$$

در شرایط مرزی خطی برای آشفتگیها داریم :

$u_1' = 0$ در $r = k_1$ (۲۱)

$u_2' = 0$ در $r = k$ (۲۲)

$u_1' = u_2' = \frac{\partial \eta'}{\partial t}$ در $r = 1$ (۲۳)

$p_2' - p_1' = \frac{\partial \eta'}{\partial t}$ در $r = 1$ (۲۴)

$p_2' - p_1' = -(1-\lambda)\eta' + L_2(\eta' + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial z^2})$ در $r = 1$ (۲۵)

دراینجا اگر آشفتگیها را روی مدهای نرمال جدا پذیر بگیریم داریم :

$$(u_i', v_i', w_i', p_i', n_i') = (U_i(r), V_i(r), W_i(r), p_i(r), A)e^{i(kz+n\theta)+st} \qquad (۲۶)$$

که $V_i(r)$ و $W_i(r)$ و $p_i(r)$ و A بترتیب دامنه های سرعتها و فشار و سطح است.به علاوه k عدد موج محوری،n عدد سمتی و $S = \sigma + i\omega$ یکعدد مختلط که قسمت حقیقی آن نرخ رشد و قسمت موهومی آن فرکانس نوسان آشفتگی است بنابراین مدهای نرمال معادلات17-20 معادلات زیر بر حسب دامنه ها می شوند:

$$SU_i - 2V_i = -\frac{1}{2-i} Dp_i \qquad (۲۷)$$

$$SV_i - 2U_i = -\frac{in}{r\lambda^{2-i}} p_i \qquad (۲۸)$$

$$SW_i = -\frac{ik}{\lambda^{2-i}} p_i \qquad (۲۹)$$

$$\frac{1}{r} D(rU_i) + \frac{in}{r} V_i + ikW_i = 0 \qquad (۳۰)$$

با شرایط مرزی متناظر:

$U_1 = 0$ در $r = k_1$ (۳۱)

$U_2 = 0$ در $r = k$ (۳۲)

$U_1 = U_2 = SA$ در $r = 1$ (۳۳)

$P_2 - P_1 = -\Psi A$ در $r = 1$ (۳۴)

$\Psi = (1-\lambda) - L_2(1 - n^2 - k^2)$ $\qquad D \equiv \frac{d}{dr}$ (۳۵)

۳. حل معادلات

قابل ذکر است که نتایج جدید بدست آمده قبلا در مورد مدهای سمتی و محوری در مقاله مذکورچاپ شده است. امـا از برخـی اثرات مانند λ در روابط صرفنظر شده بود اما در این مقاله ما اثر λ و همچنین k_2 را در نظر گرفتیم.

ناپایداری دو سیال ویسکوز چرخان که مانند یک جسم صلب بین دو سیلندر هم مرکز فرض می شود در اینجا بررسی می شود.

ما ابتدا توسط معادلات بدست آورده شده۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰ معادله مربوطه را بدست می آوریم.

برای اندیس $i=1$ توسط دو معادله اول با استفاده از حل دو معادله دو مجهول خواهیم داشت:

$$U_1 = -\frac{1}{(s^2+4)}(sDP_1 + \frac{2in}{r}P_1) \tag{۳۶}$$

$V1$و$W1$ را نیز از معادلات بدست خواهیم آورد.

با گذاردن معادلات بدست آورده شده در بالا در معادله ۳۰ و ساده کردن آن خواهیم داشت :

$$D^2P_1 + \frac{1}{r}DP_1 - \left[\frac{n^2}{r^2} + \alpha^2\right]P_1 = 0 \tag{۳۷}$$

که

$$\alpha^2 = \frac{k^2(s^2+4)}{s^2} \tag{۳۸}$$

حال معادله دیفرانسیل بالا را حل می کنیم جواب این معادله تابع بسل خواهد بود:

$$P_1(r) = A_1I_n(\alpha r) + B_1K_n(\alpha r) \tag{۳۹}$$

اگر با اندیس ۲ ($i=2$) این معادلات را حل کنیم مانند بالا معادلاتی با اندیس ۲ خواهیم داشت:

$$U_2 = -\frac{1}{(s^2+4)\lambda}(sDP_2 + \frac{2in}{r}P_2) \tag{۴۰}$$

$$P_2(r) = A_2I_n(\alpha r) + B_2K_n(\alpha r) \tag{۴۱}$$

حال ما ۴ ضریب ثابت داریم که برای بدست آوردن ضرایب ثابت از شرایط مرزی زیر استفاده می کنیم .

$$U_1 = 0 \quad at \quad r = k1 \tag{۴۲}$$

$$U_2 = 0 \quad at \quad r = k2 \tag{۴۳}$$

$$U_1 = U_2 = sA \quad at \quad r = 1 \tag{۴۴}$$

$$P_2 - P_1 = -\psi A \quad at \quad r = 1 \tag{۴۵}$$

$$\psi = (1-\lambda) - L_2(1-n^2-k^2) \tag{۴۶}$$

همان طور که می بینید ما ۵ معادله داریم که البته A و Ψ نیز خود مجهول اند بنابراین ما می تـوانیم معادلـه مقـدار ویـژه را بدست آوریم.

از شرط مرزی اول داریم:

$$U_1 = -\frac{1}{(s^2+4)}(sDP_1 + \frac{2in}{r}P_1) = 0 \quad \text{در} \quad r = k_1 \tag{۴۷}$$

با این شرط ما برای P_1 یکی از ضرایب را می توانیم حذف کنیم.
از شرط مرزی دوم نیز داریم:

$$U_2 = 0 \quad at \quad r = k2 \tag{۴۸}$$

که می تواند یکی از ضرایب P_2 را حذف کند

حال ما بین P_1,P_2 دو ضریب $C_1,C3$ را داریم با در نظر گرفتن شرط مرزی سوم یعنی u1=u2 در r=1 می توانیم C3 را بر حسب C_1 بدست آوریم که در نتیجه P_2-P_1 در هر نقطه ای را فقط با داشتن مجهول C_1 میتوان بدست آورد که با در نظر گرفتن قسمت آخر شرط مرزی ۳ میتوان A را نیز براساس C_1 نوشت

وچون در هر دو مورد می توان C_1 را بصورت ضریب کلی بدست آورد در نتیجه در تقسیم ما بین $\frac{P_1\text{-}P_2}{A}=\psi$ حذف خواهد شد ورابطه مفید اما پیچیده ما بین عناصر آشفتگی پیدا خواهد شد که رابطه ای بین $(k_1,k_2,s,k,n,L_1,\lambda)$ خواهد بود.اگر ما حالت متقارن را در نظر بگیریم که آشفتگیها به θ مرتبط نباشند

n=0 می شود که معادله در این حالت بصورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\left(I_1(\alpha)K_1(\alpha k_2) - I_1(\alpha k_2)K_1(\alpha)\right)} \\
&\times\frac{1}{\left(I_1(\alpha)K_1(\alpha k_1) - I_1(\alpha k_1)K_1(\alpha)\right)} \\
&\times\left\{\begin{aligned}
&I_0(\alpha)I_1(ak_1)K_1(\alpha)K_1(\alpha k_2) \\
&-\lambda I_1(\alpha k_1)I_1(\alpha k_2)K_0(\alpha)K_1(\alpha) \\
&+I_1(\alpha k_1)K_0(\alpha)K_1(\alpha)I_1(\alpha k_2) \\
&-(1-\lambda)I_0(\alpha)I_1(\alpha)K_1(\alpha k_1)K_1(\alpha k_2) \\
&-\lambda I_0(\alpha)I_1(\alpha k_2)K_1(\alpha)K_1(\alpha k_1) \\
&+\lambda I_1(\alpha)I_1(\alpha k_1)K_0(\alpha)K_1(\alpha k_2) \\
&-I_1(\alpha)I_1(\alpha k_2)K_0(\alpha)K_1(\alpha k_1)
\end{aligned}\right\} \\
&= \frac{\alpha\left(\lambda + L_1\lambda(1-k^2) - 1\right)}{s^2+4}
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

و در این حالت ثابت می شود که مد ایستگاهی داریم و $\omega = 0$ است در نتیجه σ=s است .

در این رابطه ما علاوه بر پارامترهای در نظر گرفته شده در مقاله اروزکو و لویس[۱۰] پارامتر λ و k_2 که مربوط به استوانه خارجی است نیز در نظر گرفتیم و این اولین گام در مقاله ماست که در پایین با رسم شکلهای این معادله را چک می کنیم . اگر ما تغییرات n بین ۰ و ۱ را بررسی کنیم می بینیم که برای k های بالاتر از ۳ اختلاف بین منحنی ها تقریبا صفر می شود.شکل ۱

اگر ما تغییرات منحنی s را بین L_1=0.01 تا L_1=1000 رابررسی کنیم به شکل ۲ دست می یابیم که درستی شکل ما در مقاله اروزکو و لویس[۱۰] آمده است و آن را می توان چک کنیم.

اگر ما منحنی های S را نسبت به تغییرات k را با تغییرات k_1 بین ۰ تا ۱ بکشیم شکل ۳ را خواهیم داشت.

همان طور که از شکلها دیده می شود منحنی ها نسبت بـه تغییـرات k_1 حالـت لگـاریتمی دارد.اگـر مـا تغییـرات λ را در ایـن منحنیها بررسی کنیم به شکل ۴ می رسیم در این شکل برای λ های بزرگتر از صد تا ∞ نمودار تغییر نمـی کنـد امـا تغییـرات لگاریتمی در λ های پایینتر دارد. اگر ما در شکل ۴ n را تغییر دهیم آن را یک در نظر بگیریم شکل ۵ راخواهیم داشت.
در شکل ۶ نیز این منحنی ها براساس تغییرn برای λ=۱۰ کشیده شده است. همان طور که از فرمول واشکال پیداست ما k ای را می توانیم پیدا کنیم که به ازای آن σ ی بیشترین مقدار خود را بگیرد اگر ما بـرای L_1 هـای مختلـف σ_{max} را رسـم کنـیم (برای $n=0$ و$k_1=0.5$ و $k_2=1.5$ و λ=۱۰۰۰۰) به شکل ۷ دست پیـدا مـی کنـیم کـه مـی تـوانیم آن را در مقالـه اروزکـو و لویس[۱۰] چک کنیم.
حال اگر ما برای $n=1$ نمودار بالا را رسم کنیم مقدار σ_{max} به مقدار ثابتی برای L_1 بزرگتر از مقداری خواهد رسید کـه آن در شکل ۸ نمایش داده شده است. اگرما λ را بین ۰ و ۱ انتخاب کنیم بنا به اروزکو و لویس[۱۰] به علت اثر نیروی گریز ازمرکـز روی سیال با چگالی بیشتر پایدار می ماند حال اگر شکل زیر را ببینیم به همین نتیجه خواهیم رسـید. همـان طـور کـه در شـکل ۹ دیده میشود مقدار σ برای k های مثبت منفی است در نتیجه پایدار است.

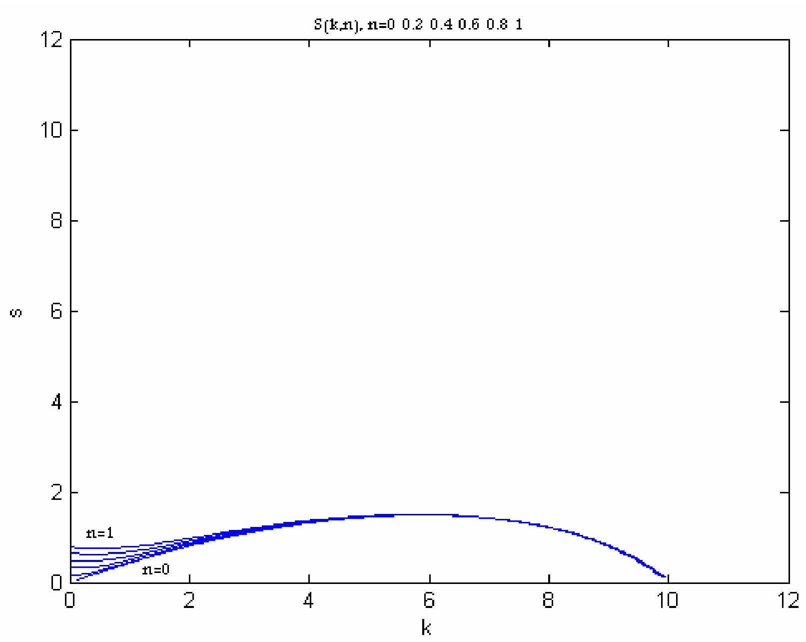
۵. نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

نتایج ما اهمیت اثر سیلندر داخلی را روی ناپایداری سیستم دو طبقه سیال واضح می سازد. وقتی لایه سـیال داخلـی پوشـاننده سیلندر داخلی تنها باشد یعنی سیال خارجی وجود نداشته باشد مسئله ناپایداری بیشتری نسبت به موقعی که سیـستم دولایـه سیال داشته باشیم که سیال داخلی یک دانسیته بزرگتری نسبت به سیال خارجی داشـته باشـد خواهـد داشـت.در ایـن حالـت نشان داده می شود که مدهای سمتی طول موج و مارپیچی نقش مهمی را در ناپایداری بـازی مـی کننـد.بخـصوص نـشان داده شده است که ناحیه L_1 مد متقارن $n=0$ بعلت وجود طول موج سمتی $n=1$ در حضور سیلندر داخلی کم شده اسـت.ایـن یـک نتیجه غیر منتظره است زیرا مد $n=1$ وقتی $k_1=1$ باشد ظاهر نمی شود.براساس نتایج ما اگر λ را زیاد کنیم میزان ناپایداری بر اساس k ثابت زیاد خواهد شد اما این افزایش بصورت لگاریتمی خواهد بود.همچنین افزایش n در k های کوچک باعث افـزایش نا پایداری می شود همچنین معلوم می شود افزایش نسبت شعاع داخلی به فاصله اش از سطح ناپایـداری را بـصورت لگـاریتمی کاهش خواهد داد.واز نتایج آخرین نیز نتیجه می شود که اگر سیال بالایی سنگین تر از پایینی باشد سطح پایدار خواهد بود کـه این امری بدیهی است.

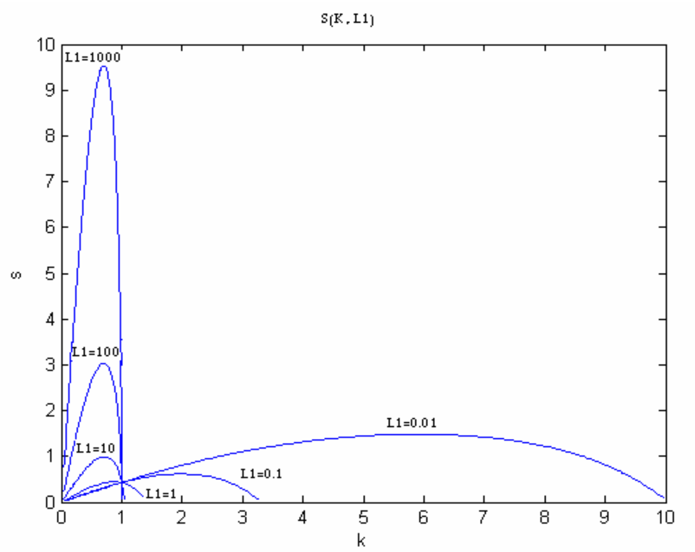
مراجع

[1] - S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability ~Dover, New York, 1981, Chap. 12.
[2]-Lord Rayleigh, ''On the dynamics of revolving fluids,'' Proc. London Math. Soc. 93, 148 ~1916!.
[3]-L. M. Hocking and D. H. Michael, ''The stability of a column of rotating liquid,'' Mathematika **6**, 25 ~1959!.
[4]-C.-S. Yih, ''Instability of a rotating liquid film with a free surface,'' Proc. R. Soc. London, Ser. A **258**, 63 ~1960!.
[5]- L. M. Hocking, ''The stability of rigidly rotating column of liquid,''Mathematika **7**, 1 ~1960!.
[6]-T. J. Pedley, ''The stability of rotating flows with a cylindrical free surface,'' J. Fluid Mech. **30**, 127 ~1967!.
[7]-D. D. Joseph, Y. Renardy, M. Renardy, and K. Nguyen, ''Stability of rigid motions and rollers in bicomponent flows of immiscible liquids,'' J. Fluid
[8] - P.D Weidman, M. Goto and A. Fridberg, ''On the instability of inviscid,rigidly rotating immiscible fluids in zero gravity,'' Z. Angew. Math. Phys. 48, 921 (1971)

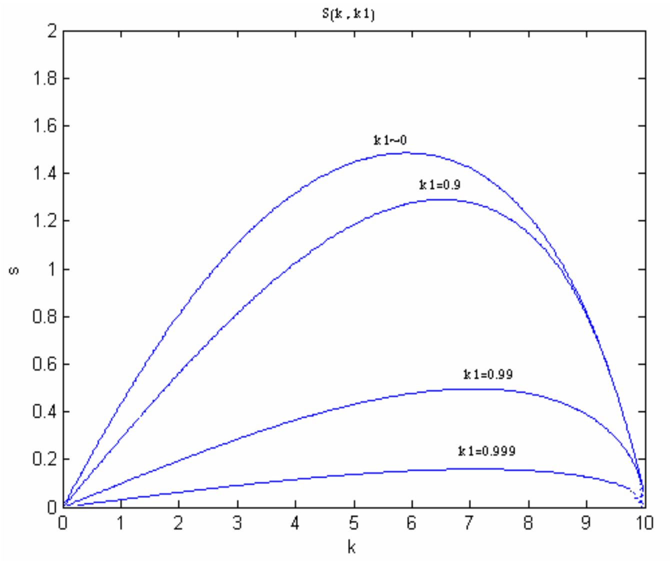
[9]- *International Journal of Thermal Sciences, Volume 47, Issue 11, November 2008, Pages 1422-1435* Hua-Shu Dou, Boo Cheong Khoo, Khoon Seng Yeo
[10] - L. A. Da´valos-Orozco and E. Va´zquez-Luis Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Auto´noma de Me´xico," Instability of the interface between two inviscid fluids inside a rotating annulus in the absence of gravity" September 2003.



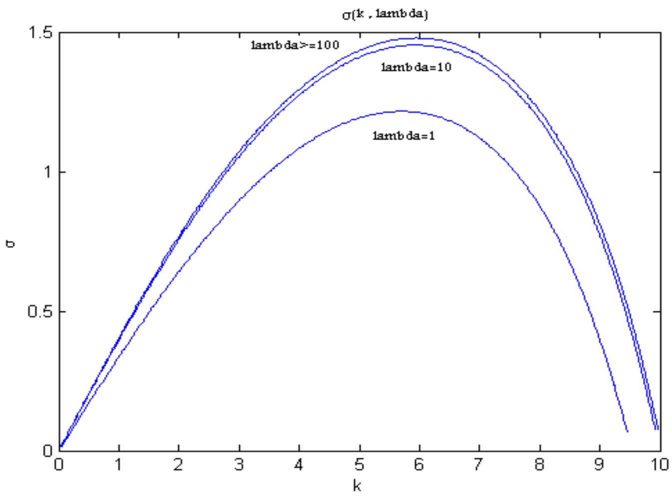
شکل ۱:تابع s برحسب k برای n های مختلف



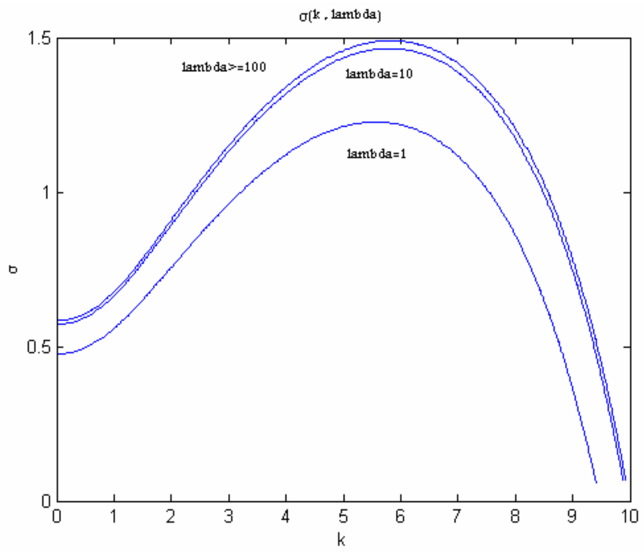
شکل ۲:تابع s برحسب k برای L_1 های مختلف



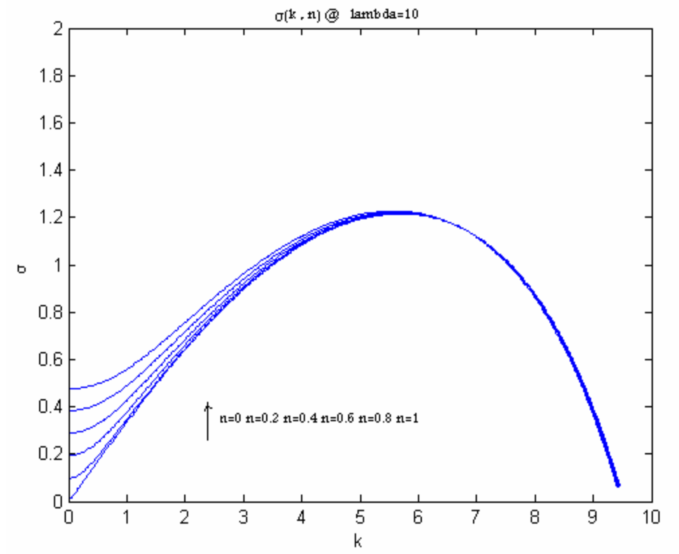
شکل ۳:تابع s بر حسب k برای k_1 های مختلف



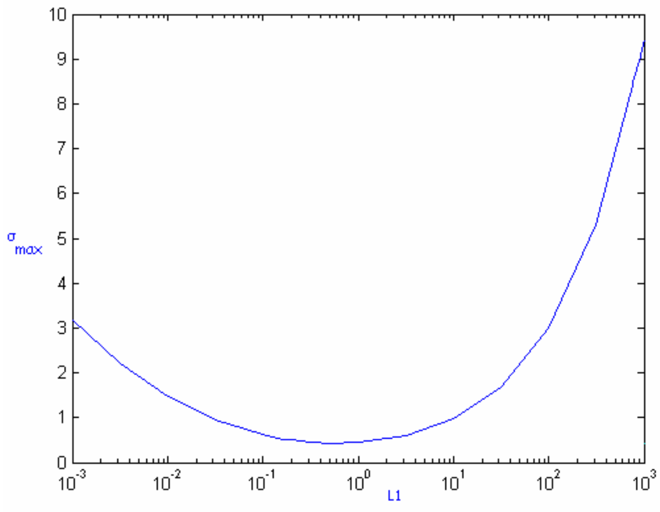
شکل ۴:تابع s برحسب k برای λ های مختلف



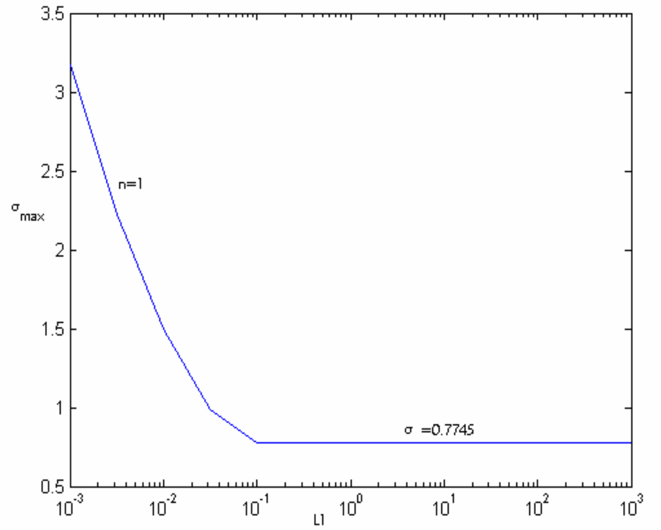
شکل ۵:تابع s برحسب k برای λ های مختلف با $n\neq0$



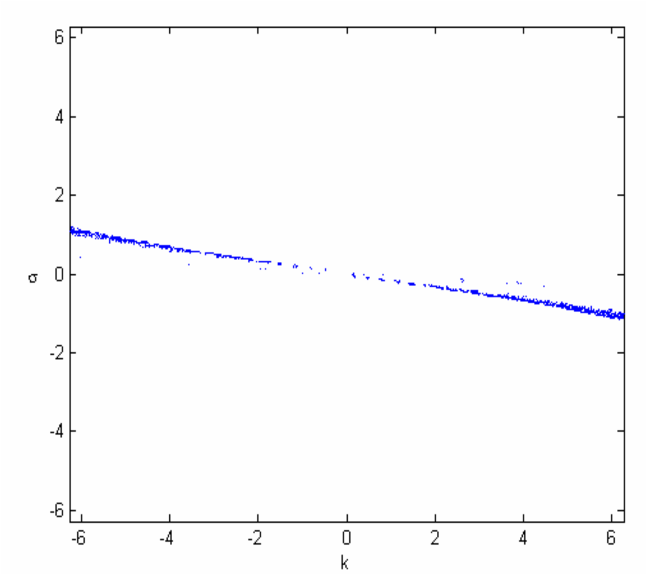
شکل ۶:تابع s برحسب k با n های مختلف



شکل ۷: σ_{max} به عنوان تابعی از L_1



شکل ۸: σ_{max} به عنوان تابعی از L_1



شکل ۹: σ بر حسب k برای حالت $\lambda<1$