

تحلیل عددی ناپایداری بحرانی جریان تیلور - کوئت

مهدی صاحبی

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

علی عبدالهی*

دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

احمد صداقت

استادیار دانشکده مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده: یکی از مسائل کلاسیک در پایداری هیدرو دینامیک جریان میان دو استوانه هم‌مرکز است، که به عنوان جریان تیلور - کوئت شناخته می‌شود. اگر استوانه داخلی با سرعت ثابتی دوران کند یک سرعت زاویه‌ای بحرانی برای استوانه داخلی وجود دارد که در سرعت زاویه‌ای کوچکتر از این مقدار جریان بین دو استوانه برشی است (جریان کوئت). اما با افزایش سرعت زاویه‌های گردابه‌ای سه‌بعدی ایجاد می‌شود که به گردابه‌های تیلور مشهور است. تیلور اولین کسی بود که در تطابق تئوری ناپایداری جریان میان دو استوانه با نتایج تجربی موفق بود تعریف مسئله به این صورت است که استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد و استوانه خارجی ساکن است و از دیواره‌های کناری در فضای بین دو استوانه جریانی وارد یا خارج نمی‌شود. مساله برای سیال‌هایی با ویسکوزیته متفاوت تحلیل شده است هر چند که نتایج به صورت اعداد بی‌بعد ذکر شده اند. برای طول استوانه نیز چند مقدار متفاوت اختیار شده است. همچنین اثر نسبت شعاع بر ناپایداری بررسی شده است. معادلات پیوستگی و مومنوم در حالت آرام و به روش عددی حجم محدود حل شده است و شبکه‌ی حل پس از بررسی استقلال نتایج از شبکه‌بندی انتخاب شده است. برای تایید و تصدیق مدل‌سازی عددی، نتایج، با توجه به دو معیار ناپایداری تیلور کوئت و گرادیان انرژی با نتایج تجربی و تحلیلی مقایسه شده است. در معیار ناپایداری تیلور کوئت عدد تیلور (Ta) - که نشان‌دهنده نسبت نیروی حاصل از لزجت به نیروی گریز از مرکز است - و در معیار گرادیان انرژی، ثابت گرادیان انرژی (k) - که برابر نسبت گرادیان انرژی در راستای عمود بر جریان به افت انرژی در طول جریان است - به عنوان اعداد موثر در شناخت شروع ناپایداری تعریف می‌شوند. از مشاهده خطوط جریان و بردارهای سرعت در صفحه طولی و در سرعت زاویه‌ای بزرگتر از سرعت زاویه‌ای بحرانی، مشخص می‌شود که جهت چرخش گردابه‌های مجاور عکس یکدیگر می‌باشد همچنین در دو انتهای استوانه اندازه گردابه‌ها بزرگتر از سایر گردابه‌ها در طول فضای میان دو استوانه می‌باشد. با افزایش طول استوانه مقدار سرعت زاویه‌ای بحرانی تفاوت بسیاری نمی‌کند و تنها تفاوت میان دو طول مختلف تعداد گردابه‌های تشکیل شده در فضای میان دو استوانه می‌باشد. افزایش لزجت روی تعداد گردابه‌ها در نقطه بحرانی ناپایداری موثر نبوده و تعداد گردابه‌ها تنها به هندسه جریان و نسبت شعاع‌ها بستگی دارد. نمودار تنش برشی بر حسب شعاع در صفحه عمود بر محور دوران در یک مقطع خاص نشان می‌دهد که در فاصله میان دو استوانه، تنش برشی مقداری ناچیز و نزدیک به صفر دارد و در نزدیکی دیواره‌های دو استوانه مقدار آن ماکزیمم می‌شود. به طور کلی با افزایش نسبت شعاع، عدد تیلور بحرانی رو به افزایش می‌گذارد اما این نتیجه برای نسبت شعاع‌های کوچکتر از ۰,۱۵ صدق نمی‌کند. برعکس هنگامی که معیار ناپایداری بر اساس عدد K بیان شود نمودار عدد K بحرانی بر حسب نسبت شعاع اکیدا نزولی خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: ناپایداری جریان، جریان تیلور-کوئت، شبیه‌سازی عددی، استوانه‌های هم‌محور

۱. مقدمه

* مؤلف مکاتبه کننده

پست الکترونیکی: a.abdollahi@me.iut.ac.ir

یکی از مسائل کلاسیک در پایداری هیدرودینامیک جریان میان دو استوانه هم‌مرکز در اثر چرخش یک استوانه و ثابت بودن استوانه دیگر یا چرخش دو استوانه در یک جهت یا جهت مخالف است که به عنوان جریان تیلور-کوئت شناخته می‌شود. اگر استوانه داخلی در حال دوران با سرعت ثابت باشد یک سرعت زاویه‌ای بحرانی برای استوانه داخلی وجود دارد که در سرعت زاویه‌ای کوچکتر از این مقدار بحرانی یک جریان برشی (جریان کوئت بین دو استوانه) وجود دارد. اما با افزایش سرعت زاویه‌ای و گذر از آن جریان سیال ناپایدار شده و گردابه‌های سه‌بعدی ایجاد می‌شود. بنابراین وقتی جریان ناپایدار می‌شود جریان از حالت چرخشی قوسی افقی به صورت مسیر مارپیچ میان استوانه‌ها (شکل ۱) تبدیل می‌شود که به عنوان گردابه‌های تیلور مشهور است که این پدیده را تیلور در سال ۱۹۲۳ مشاهده کرد [۱]. تنش‌های مکانیکی میان دیواره‌های استوانه حالت غیر متعادل را بوجود می‌آورند که این نوع ناپایداری ناشی از اثر ناپایداری نیروهای گریز از مرکز است و لزجت باعث از بین بردن ناپایداری می‌شود مقایسه میان لزجت و نیروهای گریز از مرکز با استفاده از عدد تیلور می‌باشد.

$$Ta = \frac{r_1 \omega_1 d}{\nu} \quad (1)$$

$d = r_2 - r_1$ به ترتیب شعاع و سرعت زاویه‌ای استوانه داخلی و d فاصله فضای میان دو استوانه r_1 و r_2 و ν لزجت سینماتیکی سیالی است که فضای میان دو استوانه را پر می‌کند. اگر استوانه داخلی ثابت و استوانه خارجی در حال دوران با سرعت ثابت باشد در یک سرعت زاویه‌ای بحرانی جریان آشفته می‌شود در حالی که این نوع جریان مرحله گذار یا ناپایداری ندارد. بررسی ناپایداری تیلور-کوئت شبیه بررسی ناپایداری ریلی بنارد است که عدد تیلور بحرانی که در آن جریان تیلور-کوئت ناپایدار می‌شود برای عدد رینولدز کم و انحنای بالا مناسب است و برای عدد رینولدز بالاتر با انحنای کمتر جریان آشفته می‌شود و با این معیار تطبیق ندارد. بخاطر این است که معیار تیلور تنها اثر گریز از مرکز را در نظر می‌گیرد و نیروی اینرسی سینماتیکی در آن موثر نیست. کاربرد گسترده و متنوع جریان در صنایع مکانیکی، شیمیایی و هسته‌ای باعث تشویق بیشتر محققین به بررسی آن شده است. پدیده تولید گردابه در سرعت چرخشی بالا در ساخت فیلترهای چرخشی برای انتقال مولکول‌های آلاینده با جریان محوری در سیال میان استوانه‌های چرخشی استفاده می‌شود [۲]. کاربرد دیگر گردابه‌های موجی برای امور زیستی مثل ذخیره خون در حالت مایع است [۳]. کاربرد مهم این جریان در خنک‌کاری ماشین‌های الکتریکی دوار می‌باشد که با توجه به هندسه ژنراتور و چرخش روتور با نمونه کلاسیکی از جریان تیلور-کوئت مواجه هستیم که یک جریان محوری (مربوط به سیال سرد کننده) به آن تحمیل می‌شود [۴]. کاربرد دیگر جریان تیلور کوئت در تکنولوژی جذب جریان گردابه‌ای است. در چنین سیستمی هنگامی که رزین‌های جذب کننده در گردابه‌های ایجاد شده در جریان معلق می‌شوند یک عملیات واحد جذب جریان گردابه‌ای ایجاد می‌شود. هم‌اکنون از این تکنولوژی برای جدا کردن مستقیم پروتئین از تخمیر مواد آلی استفاده می‌شود [۵].

نیوتن اولین شخصی بود که جریان میان دو استوانه هم‌مرکز را بررسی کرده است [۶]. کوئت به همراه مالوک در سال ۱۸۸۸ به بررسی رفتار لزجت پرداختند. تئوری ریلی در سال ۱۹۱۷ برای جریان‌هایی مانند ریلی بنارد و تیلور-کوئت انجام گرفت که تطبیق خوبی با نتایج تجربی داشت [۷]. تیلور در سال ۱۹۲۳ اولین کسی بود که در تطابق تئوری ناپایداری جریان میان دو استوانه با نتایج تجربی موفق بود [۱]. فون کارمن در سال ۱۹۵۶ با استفاده از نیروی گریز از مرکز و گرادیان فشار ناپایداری اولیه را بدست آورد [۸]. دانلی در سال ۱۹۹۱ یک تاریخچه ساده از جریان تیلور-کوئت بیان کرده است [۱۰]. ناپایداری در مقاله سیدر در سال ۱۹۷۰ موجود است [۹]. آندرک و همکارانش در سال ۱۹۸۶ برای نسبت شعاع 0.883 ناپایداری را بصورت تجربی بررسی کردند [۱۱]. اصفهانی و نبوتی در سال ۲۰۰۳ به تجزیه و تحلیل عددی جریان تیلور-کوئت با استفاده از نرم افزار تجاری فلونت پرداختند [۱۲]. اولین تحقیقات در بررسی اثر گرادیان دما در جریان تیلور-کوئت به منظور مشکلات سرمایه‌ی در ماشین‌های الکتریکی دوار توسط کریش در سال ۱۹۶۸ انجام شده است [۱۳]. علی و همکارش

در سال ۱۹۹۰ از تئوری پایداری خطی، پایداری جریان تیلور - کوئت با گرمایش شعاعی در فاصله میان دو استوانه هم‌مرکز را بررسی و ضمن تعیین حدود پایداری نشان داده اند که افزایش عدد پرانتل سیال باعث ناپایداری جریان می‌شود [۱۴]. دانلی در سال ۱۹۹۱ نشان داد که جریان محوری که به علت اثر شناوری القا می‌شود اثر قابل ملاحظه‌ای بر پایداری جریان دارد و وجود گرادیان شعاعی دما باعث پایداری جریان می‌شود [۱۵]. نوئی و همکارانش حالت‌های خاص جریان تیلور - کوئت مانند جریان میان دو استوانه با خروج از مرکزی، میان دو کره هم‌مرکز، جریان میان دو مخروط هم‌محور را بررسی کردند [۱۶]. دو، در سال ۲۰۰۶ تحلیل پایداری جریان با استفاده از تئوری گرادیان انرژی بیان کرد که تطبیق خوبی با نتایج تجربی داشت [۱۷]. این تئوری شرایط بحرانی برای معین کردن ناپایداری جریان بوسیله نسبت معین k که نسبت انرژی مکانیکی کل در مسیر عمود بر جریان به افت انرژی مکانیکی کل در راستای جریان است را مشخص می‌کند. وقتی بیشترین k مربوط به جریان از این مقدار بحرانی بیشتر باشد ناپایداری رخ می‌دهد و برای جریان‌های موازی این مقدار k بحرانی ۳۷۰-۳۸۹ گزارش شده است که نتایج تئوری تطبیق خوبی با آن دارد مقدار k با توجه به آزمایشات تجربی محاسبه شده است و در این تئوری تنها شرایط بحرانی ناپایداری بدست آمده است و بصورت کامل فرایند ناپایداری ذکر نمی‌شود. در تئوری گرادیان انرژی، انرژی در راستای عمود بر جریان باعث ناپایداری جریان می‌شود و لزجت یا افت انرژی مکانیکی باعث پایداری جریان می‌شود که توزیع افت انرژی در پخش و انتقال گرما و پایداری جریان موثر است. دو، در سال ۲۰۰۸ با استفاده از تئوری گرادیان انرژی و تعیین k بحرانی برای نسبت شعاع‌های متفاوت به حل مسئله تیلور - کوئت پرداختند [۱۸].

در این مقاله به شبیه‌سازی عددی جریان تیلور - کوئت میان دو استوانه هم‌مرکز برای چند نوع شعاع مختلف با یک نسبت شعاعی پرداخته شده است و نتایج عددی با نتایج تجربی و تحلیلی موجود در مراجع [۱۸] و [۱۹] تطبیق داده شده است و در ادامه برای نسبت شعاع‌های مختلف نمودارهای اعداد ثابت بحرانی براساس نسبت شعاع ترسیم و با توجه به شکل خطوط جریان و بردارهای سرعت به تحلیل مسئله ناپایداری تیلور - کوئت پرداخته شده است.

۲. هندسه مسئله

در مقاله حاضر شبیه‌سازی عددی جریان تیلور - کوئت میان دو استوانه هم‌مرکز که شماتیک هندسه و مختصات استفاده شده در مدل‌سازی جریان در شکل (۲) آورده شده است. در شرایط مرزی مسئله استوانه خارجی ثابت در نظر گرفته شده است و استوانه داخلی با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای بحرانی برای حالت‌های بالا جایی که سرعت‌های محوری مانند شکل (۳) قابل نظر در دو جهت مخالف باشند می‌باشد. در مرز ورودی و خروجی استوانه‌ها نه جریان سیال وارد می‌شود و نه جریان سیال خارج می‌شود. نوع سیال در آزمایشات آب و روغن با خواص ثابت در نظر گرفته شده است و اثر لزجت روی پایداری بررسی شده است و طول استوانه در شبیه‌سازی عددی چند مقدار اختیار شده است.

۳. معادلات حاکم

برای جریان تیلور - کوئت (جریان میان دو استوانه چرخشی هم‌مرکز) معادلات جریان سه‌بعدی تراکم پذیر در مختصات استوانه‌ای بصورت زیر نوشته شده است.

معادله پیوستگی:

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

معادلات نایر

استوکس:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (u.\Delta u)_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (u.\Delta u)_\theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (u.\Delta u)_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (5)$$

۴. شبکه بندی

مسئله به صورت دو بعدی متقارن محوری چرخشی شبکه بندی شده است تعداد دقیق‌های المان‌های مورد استفاده برای هندسه‌های مختلف مورد بررسی متفاوت بوده است اما برای تمامی هندسه‌ها از روش مشابه برای شبکه‌بندی سود برده شده است. در تمامی هندسه‌ها در نقاط بحرانی یعنی فضای میان دو استوانه که تحلیل آن مورد نظر است شبکه به مقدار کافی ریز شده است. بنابراین فضای میان دو استوانه که تحلیل پایداری اهمیت پیدا می‌کند ریزترین شبکه‌ها قرار گرفته‌اند و هر چه از فضای میان استوانه دورتر می‌گردیم شبکه خشن‌تر می‌گردد.

در ضمن به عنوان مثال برای یک نوع خاص شبکه‌بندی فضای میان دو استوانه را به صورت 100×20 در نظر گرفته و با مشاهده نتایج عددی و مقایسه آن که با نتایج عددی حاصل از مش 200×40 یکسان بوده بنابراین نتیجه می‌گیریم که نتایج بدست آمده ما استقلال از شبکه‌بندی دارد. تعداد المان‌ها در فضای میان دو استوانه برای تمامی هندسه‌ها 100×40 است که به نظر می‌رسد که این شبکه‌بندی با تطبیق بسیار خوب حاصل از حل عددی با نتایج تجربی و نیز زمان مناسب برای همگرایی، یک انتخاب بهینه یا نزدیک آن است.

معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش حجم محدود حل شده‌اند. معادلات با استفاده از روش آپویند مرتبه اول گسسته‌سازی شده و سپس معادله جبری غیر خطی حاصل به روش تکرار خط به خط حل شده‌اند که ترکیبی از دو روش تی دی ام ای و گوس سایدل می‌باشد. برای برقراری ارتباط صحیح میان فشار و سرعت از الگوریتم سیمپل استفاده شده است.

۵. تطبیق با نتایج تجربی

در مقاله حاضر پارامترهای کنترل کننده الگوی جریان (به شرط آنکه اثرات شناوری در نظر گرفته نشوند) عبارتند از:

$$\eta = \frac{r_1}{r_2} \quad (6)$$

$$Ta_c = \frac{r_1 \omega_1 d}{\nu} \quad (7)$$

$$K_c = Ta_c \frac{r_1}{2(r_1 + r_2)} \left(2 - \frac{d}{r_2}\right)^2 \left(1 - \frac{d}{r_2}\right)^2 \quad (8)$$

که در آن r_1 و r_2 شعاع استوانه داخلی و شعاع استوانه خارجی است ω_1 سرعت زاویه ای استوانه داخلی و d فاصله فضای میان دو استوانه و ν لزجت سینماتیکی سیال میان دو استوانه است. برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای بحرانی اول

زمانی که گردابه‌ها تمام طول فضای میان دو استوانه را گرفته و تقارن گردابه‌ها در کانتور سرعت محوری شکل (۴) کاملاً برقرار بوده و با توجه به نمودار سرعت محوری بر حسب شعاع مطابق شکل (۳) در یک Z خاص می‌باشد ما همان سرعت بحرانی را به عنوان سرعت زاویه‌ای بحرانی اول در نظر می‌گیریم برای مقایسه در شکل (۵) خطاهای سرعت بحرانی اول برای ۵ حالت مختلف با نسبت شعاع یکسان ۰,۸۸۳ مطابق با جدول‌های (۱-۲) را رسم کرده که می‌توان تطبیق خوب با نتایج تجربی را مشاهده کرد.

همانگونه که ملاحظه می‌گردد انطباق نتایج عددی با نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی بسیار خوب بوده و حداکثر خطای ۲۰ درصد می‌باشد که نشانگر قابل قبول بودن مدل‌سازی، شبکه‌بندی و روش حل عددی در پیش گرفته می‌باشد. حالاً با توجه به اینکه روش عددی در پیش گرفته برای یک نسبت مشخص تطبیق بسیار دارد برای نسبت‌های متفاوت نتایج تجربی موجود در جدول (۳) این روش نیز بکار گرفته شده است. و در نهایت نمودارهای عدد تیلور و عدد ثابت گرادیان انرژی بر حسب نسبت شعاع‌های مختلف در شکل‌های (۶ و ۷) رسم شده است.

۶. نتیجه‌گیری

برای دیدن اثر لزجت از یک مایع لزج‌تر مثل روغن با لزجت بالاتر به جای سیال آب در شبیه‌سازی عددی استفاده می‌کنیم. افزایش لزجت باعث می‌شود که ناپایداری در سرعت زاویه‌ای بالاتری رخ دهد، اما افزایش لزجت روی تعداد شکل‌گیری گردابه‌ها در نقطه بحرانی ناپایداری موثر نبوده و تنها به هندسه جریان و نسبت شعاع‌ها بستگی دارد.

برای بررسی اثر طول استوانه با افزایش طول استوانه مقدار سرعت زاویه‌ای بحرانی تفاوت بسیاری نمی‌کند و تنها تفاوت میان دو طول مختلف تعداد گردابه‌هایی است که در طول بزرگتر بیشتر از تعداد گردابه‌های در طول کوچکتر می‌باشد.

با توجه به توزیع خطوط سرعت شکل (۴) در صفحه طولی موازی محور دوران در مدلی با نسبت شعاع (۰,۸۳۳) در یک سرعت زاویه‌ای استوانه داخلی بزرگتر از سرعت زاویه‌ای بحرانی گزارش شده در آزمایشات، ملاحظه می‌شود جهت چرخش هر دو گردابه مجاور عکس یکدیگر می‌باشد همچنین در مجاورت دو انتها جریان از سمت استوانه خارجی به سمت استوانه داخلی می‌باشد و اندازه‌های گردابه‌های مجاور دو انتها بزرگتر از سایر گردابه‌ها در طول فضای میان دو استوانه است.

با توجه به توزیع تنش برشی بر حسب شعاع در صفحه عمود بر محور دوران در یک مقطع خاص ملاحظه می‌شود در فاصله میان دو استوانه، تنش برشی مقدار ناچیز نزدیک به صفر دارد و در نزدیکی دو دیواره استوانه مقدار آن ماکزیمم می‌شود.

به طور کلی با افزایش نسبت شعاع، عدد تیلور بحرانی رو به افزایش می‌گذارد اما این نتیجه برای نسبت شعاع‌های کوچکتر از ۰,۱۵ صدق نمی‌کند. برعکس هنگامی که معیار ناپایداری بر اساس عدد K بیان شود نمودار عدد K بحرانی بر حسب نسبت شعاع اکیدا نزولی است.

مراجع

- [1] G. I. Taylor, 'Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders', Phil. Trans. Royal Society, London A 223, 289 (1923).
- [2] WERELEY S.T., LUEPTOW R.M. 1999. Inertial particle motion in a Taylor-Couette rotating filter. Physics of Fluids, 11: 325-333.
- [3] MIN K. 1994. Hydrodynamic stability of viscous flow between rotating porous cylinders with radial flow. Physics of Fluids, 6: 144-151.
- [4] R. E. Mayle, S. Hess, C. Hirsch, J. von Wolfersdorf, 'Rotor-Stator gap flow analysis and experiments', IEEE Transaction on Energy Conversion, Volume 13, Number 2, (June 1998).
- [5] Junfen Ma, Charles L. Cooney, 'Vortex Flow Adsorption Technology', 12th International Couette-Taylor Workshop, (2001).
- [6] R. J. Donnelly, 'Taylor-Couette flow: The early days', Physics of Today, Volume 44, Number 11, 32 (1991).

- [7] L. Rayleigh, On the dynamics of revolving fluids, Proceedings of the Royal Society of London. Series A 93 (648) (Mar. 1, 1917) 148–154.
- [8] T. von Karman, 1934, Some aspects of the turbulence problem, in: Proc. 4th Inter. Congr. for Applied Mech., Cambridge, England, pp. 54–91. Also Collected Works, vol. 3, Butterworths Scientific Publications, London, 1956, pp. 120–155.
- [9] H.A. Snyder, Stability of rotating Couette flow. II. Comparison with numerical results, Phys. Fluids 11 (1968) 1599–1605..
- [10] R.J. Donnelly, Taylor–Couette flow: the early days, Phys. Today 44 (11) (1991) 32–39.
- [11] C.D. Andereck, S.S. Liu, H.L. Swinney, Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, J. Fluid Mech. 164 (1986) 155–183.
- [۱۲] اصفهانی، نبوتی، تجزیه و تحلیل عددی جریان تیلور- کوئت، هشتمین کنفرانس مکانیک شماره ها، دانشگاه تبریز، شهریور ۱۳۸۲
- [13] F. Kreith, Convection Heat Transfer in Rotating Systems, Advanced Heat Transfer 5, 129-251, (1968).
- [14] M. Ali, P.D. Weidman, 'On the stability of circular Couette flow with radial heating', Journal of Fluid Mechanics, Volume 220, pp. 53-84, (1990).
- [15] R. J. Donnelly, 'Taylor–Couette flow: The early days', Physics of Today, Volume 44, Number 11 , 32 (1991).
- [16] M.N. Noui-Mehidi, N.Ohmura, K. Kataoka, ' An Experimental Investigation of Flow Mode Selection in a Conical Taylor-Couette System', International Journal of Fluid Dynamics, Volume 5, Article 1, (2001).
- [17] H.-S. Dou, Physics of flow instability and turbulent transition in shear flows, Technical Report, National University of Singapore, 2006, [http:// www.arxiv.org/abs/physics/0607004](http://www.arxiv.org/abs/physics/0607004).
- [18]- Dou, H.-S., Khoo, B.C., and Yeo, K.S., “Instability of Taylor–Couette flow between concentric rotating cylinders.”, International Journal of Thermal Science 46 ,1422–1435, 2008.
- [19]- Wereley ST and Lueptow RM. , “Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor–Couette flow,” J., Fluid Mech ;364:59–80, 1998.

جدول ۱

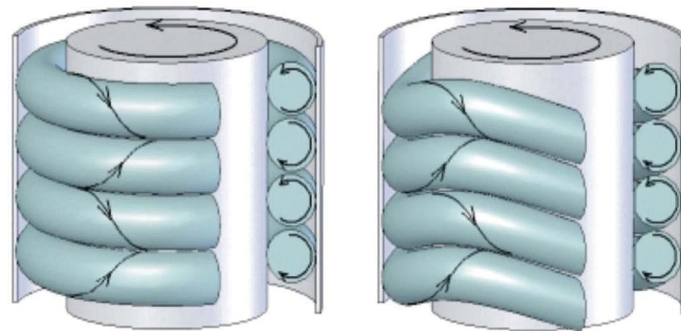
	داده های عددی سرعت زاویه ای بحرانی اول	داده های تجربی سرعت زاویه ای بحرانی اول
حالت اول	1.28	1.49
حالت دوم	2.278	2.53
حالت سوم	0.57	0.7
حالت چهارم	0.82	0.9
حالت پنجم	5.13	6.1

جدول ۲

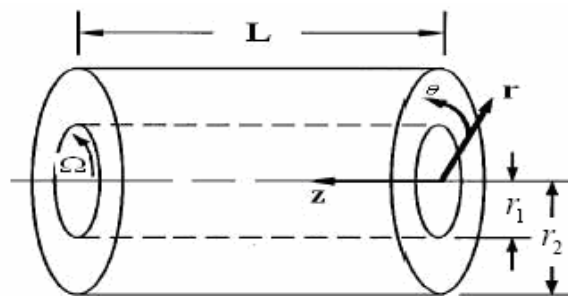
	داده های عددی عدد تیلور بحرانی اول	داده های تجربی عدد تیلور بحرانی اول
حالت اول	102	118
حالت دوم	102	113
حالت سوم	102	125
حالت چهارم	102	111
حالت پنجم	102	121

جدول ۳

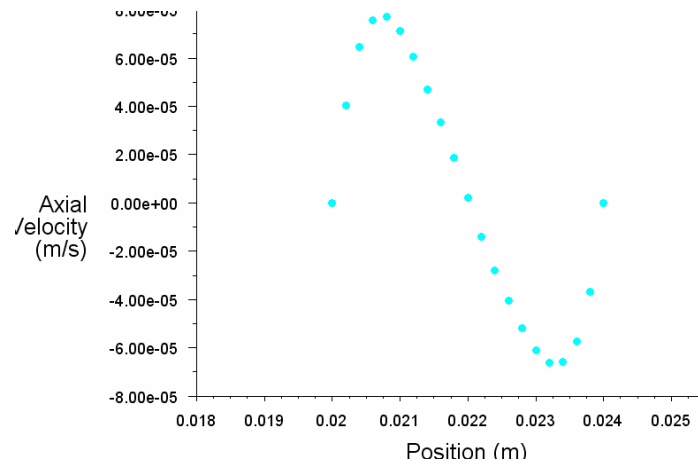
	$r_1 - cm$	$r_2 - cm$	$\frac{d}{r_1}$	$(\frac{\omega}{v})_c$	Ta_c تجربی	Ta_c عددی	k_c تجربی	k_c عددی
Taylor(1923)	3.80	4.035	0.06184	189.2	169	204	139	165
Taylor(1923)	3.00	4.035	0.345	30.5	95	108	33	38
Cloes(1965)	10.15	11.52	0.1343	84	116	-----	75	-----
Snyder(1968)	6.023	6.281	0.0428	139.9	217	259	188	223
Gollub(1975)	2.224	2.540	0.142	182	128	147	80	92
Andereck(1986)	5.25	5.946	0.1326	33	120	-----	78	-----
Hinko(2003)	29.54	29.84	0.01	39.5	350	-----	338	-----
Prigent(2004)	4.909	4.995	0.01752	758	320	395	301	371



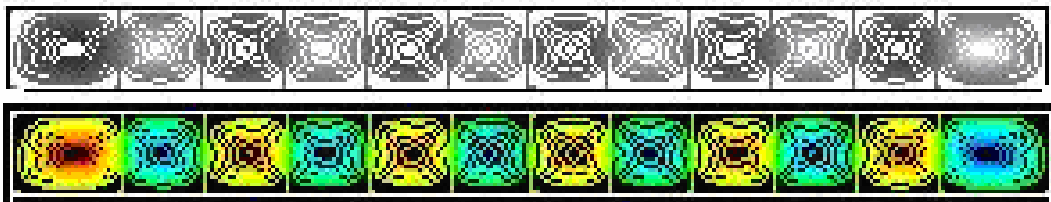
شکل ۱. چپ جریان چرخشی قوسی افقی در سرعت کمتر از سرعت زاویه ای یحرانی راست جریان مارپیچ میان استوانه ها



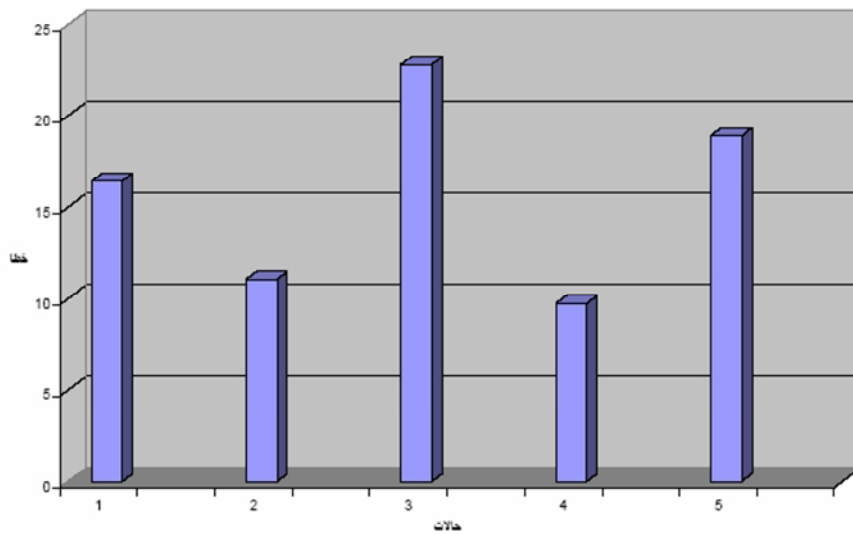
شکل ۲. مختصات استفاده شده در مدل سازی جریان



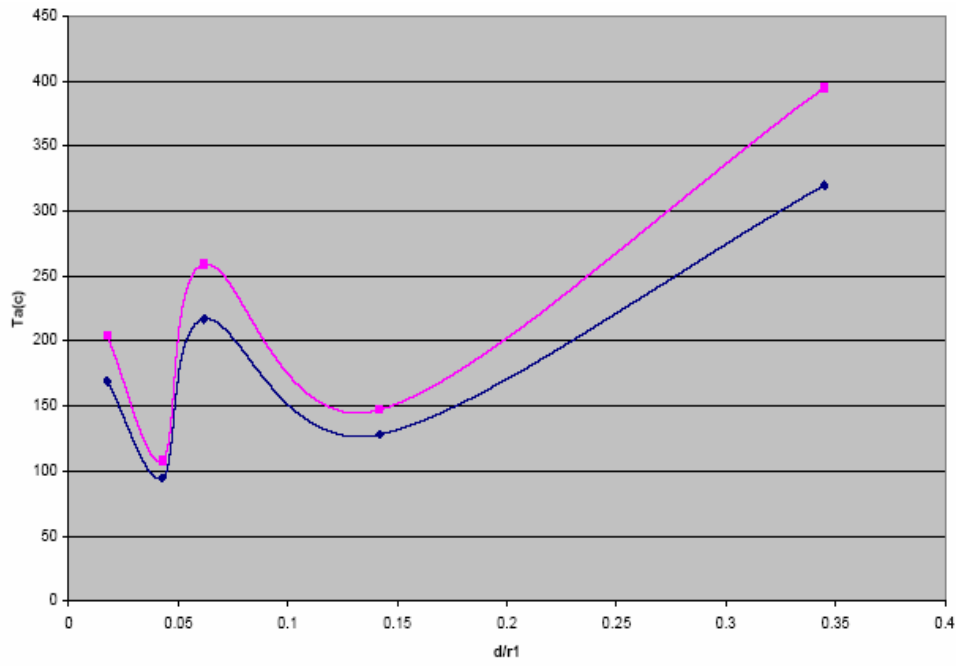
شکل ۳. نمودار سرعت محوری در صفحه عمود بر محور دوران در $z=25\text{mm}$ با شعاع داخلی ۲۰ و شعاع خارجی ۲۴ میلیمتر



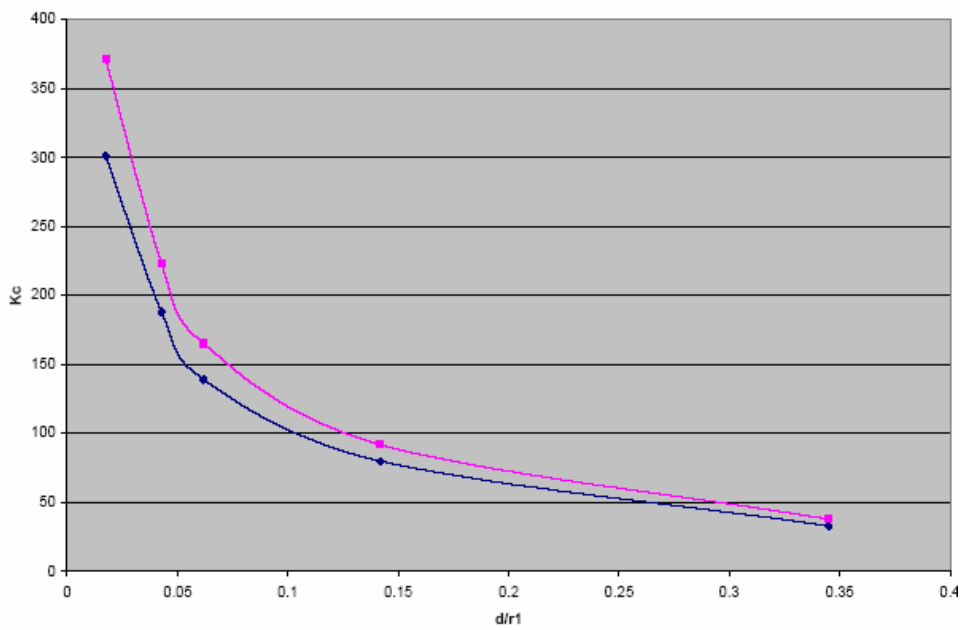
شکل ۴. توزیع سرعت در جهت طول برای شعاع داخلی ۲۰ و شعاع خارجی ۲۴ میلیمتر و سرعت دورانی ۱,۴۹ رادیان بر ثانیه



شکل ۵. نمودار خطای سرعت بحرانی اول برای ۵ حالت مختلف با نسبت شعاع یکسان ۰,۸۸۳



شکل ۶. نمودار عدد تیلور بحرانی بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع



شکل ۷. نمودار عدد K بحرانی بر حسب نسبت‌های مختلف شعاع