



## تحلیل پایداری هیدرودینامیکی برای جریان عبوری حول یک ایرفویل و پیش بینی نقطه گذار جریان

مجتبی احمدی<sup>۱</sup>، احمد صداقت<sup>۲</sup>، محسن ثقفیان<sup>۳</sup>  
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی مکانیک

### چکیده

تحلیل پایداری هیدرودینامیکی برای جریان عبوری حول یک ایرفویل از طریق حل معادله اور-سامرفلد در این مقاله انجام شده است. برای حل معادله اور-سامرفلد در یک جریان خاص نیاز به پروفیل‌های سرعت جریان و مشتقات آن درون لایه مرزی در راستای عمود بر سطح و در هر مقطع در امتداد جریان می باشد. موارد ذکر شده از حل دقیق جریان با استفاده از یک کد عددی TVD انجام می شود که معادلات ناویر-استوکس دوبعدی را به روش ضمنی حل می کند. پیش از تحلیل پایداری جریان حول یک ایرفویل این کار برای جریان بر روی یک صفحه تخت با فرض برقراری لایه مرزی بلازیوس صورت گرفت که از مقایسه نتایج آن با نتایج افراد دیگر می توان از درستی حل‌های انجام شده اطمینان حاصل کرد. در این تحقیق برای حل معادله اور-سامرفلد از روش تفاضل محدود و تبدیل آن معادله به یک معادله ماتریسی استفاده شده است که روش تفاضل محدود بکار گرفته شده وابستگی زیادی به حدس اولیه دارد و چنانچه مقادیر مناسبی به عنوان حدس اولیه برای پارامترهای مورد نیاز منظور نگردد امکان واگرایی روش وجود دارد. از اینرو برای فائق آمدن بر مشکلات همگرایی این روش تمهیداتی در نظر گرفته شده است که شامل استفاده از روش تکرار نیوتون برای حل دستگاه‌های غیر خطی و همچنین تعیین رابطه ای برای محاسبه حدس اولیه پارامترهای مورد نیاز در یک نقطه محاسباتی خاص از روی پاسخ معادله اور-سامرفلد برای همان پارامترها در نقطه محاسباتی قبلی می باشد. در این تحقیق همچنین با استفاده از روش  $e^N$  محل دقیق نقطه گذار جریان تعیین شده است. این روش با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور-سامرفلد، محل دقیق نقطه گذار از رژیم آرام به مغشوش را تعیین می کند. برای ارزیابی کد  $e^N$ ، نتایج حاصل از آن برای تعیین گذار جریان حول ایرفویل NACA 0012 با نتایج تجربی مقایسه شده است که این مقایسه حاکی از موفقیت این کد در تعیین گذار برای جریان حول ایرفویلها می باشد.

واژه های کلیدی: تحلیل پایداری - معادله اور-سامرفلد - پیش بینی گذار - روش  $e^N$  - ایرفویل دوبعدی

### مقدمه

مسئله پایداری هیدرودینامیکی یکی از مسائل مهم و اساسی در دینامیک سیالات می باشد. چگونگی تولید و رشد اغتشاشات در جریان که منجر به گذار جریان از رژیم آرام به مغشوش می گردد همواره از اهمیت اساسی در علم مکانیک سیالات برخوردار بوده است. به همین دلیل است که استفاده از یک ابزار محاسباتی در دینامیک سیالات محاسباتی CFD بر مبنای معادلات ناویر-استوکس که قادر به حل جریان به طور مستقل در دو رژیم آرام و مغشوش باشد، از کاربرد فراوانی در صنعت هوا فضا برخوردار می باشد. در واقع بطور عملی در طراحی ایرفویل یا بال هواپیما، بدون در نظر گرفتن فرآیند گذار جریان از رژیم آرام به مغشوش نمی توان نتایج قابل اطمینانی بدست آورد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی که از گرادیان فشار ضعیف در امتداد جریان و انحنای سطح کم برخوردارند، با فرض رژیم کاملاً مغشوش، می توان جریان را به میزان قابل قبولی مدل کرد. اما در جریان حول ایرفویلها با عدد رینولدز پایین، تعیین نقطه گذار برای حل دقیق جریان الزامی می باشد [۱].

در جریان های واقعی چنانچه سرعت سیال و یا ابعاد فیزیکی جسم در معرض جریان، افزایش یابند خواص جریان آرام به شدت تضعیف خواهد شد. بدین معنی که اغتشاشات بسیار کوچک که همراه با جریان آزاد می باشند با ورود به لایه مرزی تقویت می شوند و با ناپایدار کردن جریان آرام، آن را به حالت مغشوش در می آورند. بر همین مبنا مجموعه فرآیندها و تغییراتی که در یک محدوده خاص از مکان، زمان و عدد رینولدز رخ می دهد و طی آن یک جریان آرام به یک جریان مغشوش تبدیل می شود را «گذار» جریان گویند. برای شناخت بیشتر پدیده گذار لازم است که به تحلیل پایداری جریان پرداخته شود. اصولاً ناپایداری در علم تحلیل جریانهای مختلف بدین صورت تعریف می گردد که یک اغتشاش بتواند ویژگیهای پایدار جریان را برهم بزند و رژیم جریان را از حالت آرام (پایدار) به مغشوش (ناپایدار) تبدیل کند. با استفاده از تئوریهای پایداری فقط می توان ثابت کرد که جریان آرام در رینولدزهایی بزرگتر از یک مقدار خاص ناپایدار خواهد شد. لیکن تحلیلهای چیزی را در مورد جریان مغشوش پیش بینی نمی کنند. در واقع از لحاظ ریاضی به هیچ عنوان نمی توان ثابت کرد که جریان مغشوش، حالت پایدار

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، ۰۹۱۶۶۱۳۹۷۵۹، m.ahmadi@me.iut.ac.ir (نویسنده مخاطب)

<sup>۲</sup> استادیار، sedaghat@cc.iut.ac.ir

<sup>۳</sup> استادیار، saghafian@cc.iut.ac.ir

مناسب در اعداد رینولدز بالاست [۲].

شماره‌ای از فرآیند گذار جریان در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که از این شکل مشاهده می‌گردد در قسمتی از ابتدای صفحه و یا به عبارتی دیگر تا عدد رینولدز مشخصی که به عدد رینولدز بحرانی مشهور است هیچ نوع اغتشاشی در داخل لایه مرزی رشد نمی‌کند و تمام اغتشاشات توسط جریان مستهلک می‌شوند. لیکن بعد از این عدد رینولدز بحرانی، اغتشاشات ضمن حرکت به همراه جریان، با فرکانس معینی (بصورت امواج T-S) در داخل لایه مرزی به صورت خطی رشد می‌کنند. پس از آنکه دامنه اغتشاشات در مرحله خطی به اندازه کافی بزرگ شدند، مرحله رشد غیرخطی اغتشاشات شروع شده و الگویی سه بعدی از جریان را به نمایش می‌گذارند و پس از تولید توربولانس های نقطه ای، جریان کاملاً مغشوش می‌گردد [۳].

### مروری بر حلهای انجام شده معادله اور-سامرفلد و روش $e^N$

رشد و انتشار آشفتگیها اولین بار در آزمایشهای انجام گرفته توسط رینولدز در سال ۱۸۸۳ مشاهده شد. اولین مطالعات تئوری در این زمینه نیز توسط ریلی در سال ۱۸۸۰ در مورد پایداری جریانهای غیر لزج انجام شد. چند سال بعد تأثیر لزجت بر پایداری جریان توسط اور در سال ۱۹۰۷ و سامرفلد در سال ۱۹۰۸ به طور مستقل بررسی شد که امروزه معادله آنها به معادله اور-سامرفلد معروف است و در تحلیل پایداری جریانهای موازی به کار می‌رود. این معادله که بر مبنای تئوری پایداری خطی از معادلات ناویر-استوکس بدست آمده است، برای توصیف رشد اغتشاشات در جریان های دو بعدی بکار گرفته می‌شود.

اولین حلهای ارائه شده برای معادله اور-سامرفلد برای امواج اغتشاشی ناپایدار دو بعدی در لایه مرزی بلازیوس بصورت تحلیلی توسط تولمین در سال ۱۹۲۹ و شیلیختینگ در سال ۱۹۳۳ انجام شد. بدین صورت که آنها برای پروفیل سرعت درون لایه مرزی، یک تابع چند جمله ای بعنوان تقریب بکار بردند. همچنین برای تابع دامنه اغتشاش از بسطهای هایزنبرگ بعنوان تقریب استفاده نمودند. اما منحنی های پایداری خنثی که آنها بدست آوردند در رینولدز های پایین تطابق خوبی با نتایج حلهای دقیق و تجربی نداشتند. از دهه ۱۹۵۰ به بعد و با بکارگیری متدهای کامپیوتری، پاسخهایی با دقت بالا برای معادله اور-سامرفلد دست آمد. کاپلان (۱۹۶۴) با جدا کردن پاسخهای دارای سرعت حرکت سریع و کند از یکدیگر به پاسخهایی با دقت بالا دست یافت. وی مقادیر ویژه معادله اور-سامرفلد را برای اعداد رینولدز تا  $10^4$  محاسبه کرد. از آن پس، معادله اور-سامرفلد با متدهای پیشرفته محاسبات عددی به کمک کامپیوتر و عمدتاً به دو روش تفاضل محدود (Finite Difference) و روش بسط طیفی (Spectral Expansion) حل شد.

در روشهای تفاضل محدود معادله اور-سامرفلد با کاهش مرتبه به تعدادی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول تبدیل می‌گردد. سپس با استفاده از گسسته سازی معادلات اخیر به کمک تقریبهای مشتق، حل آن معادلات در ناحیه بین دو مرز جریان به صورت همزمان انجام می‌شود [۴]. الگوریتمهای مختلفی برای حل معادله از

در این مقاله تحلیل پایداری هیدرودینامیکی برای جریان عبوری حول یک ایرفویل و پیش بینی نقطه گذار جریان مدنظر می‌باشد. برای تحلیل پایداری جریان نیاز به حل معادله اور-سامرفلد (Orr-Sommerfeld) است. معادله اور-سامرفلد که به معادله پایداری جریان لزج معروف است، تقریبی از معادلات حاکم بر رشد یا کاهش دامنه یک اغتشاش در جریانهای موازی می‌باشد. تعیین نقطه گذار جریان نیز با استفاده از روش  $e^N$  یا روش اسمیت انجام می‌گردد. این روش که بر مبنای تحلیل پایداری خطی بنا نهاده شده است، از حل معادله اور-سامرفلد برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می‌کند. اما برای حل معادله اور-سامرفلد در یک جریان خاص نیاز به پروفیلهای سرعت جریان و مشتقات آن درون لایه مرزی در راستای عمود بر سطح و در هر مقطع در امتداد جریان می‌باشد موارد ذکر شده از حل دقیق جریان آرام بدست می‌آیند. ابزار استفاده شده برای حل جریان یک کد عددی (Total TVD Variation Diminishing) است که معادلات ناویر-استوکس دوبعدی را به روش ضمنی حل می‌کند. شبکه بندی استفاده شده حول ایرفویل یک شبکه C-شکل هایپربولیک بوده و مدل توربولانسی به کار رفته در کد عددی، مدل بالدوین-لوماکس (Baldwin-Lomax) است که یک مدل شناخته شده و رایج در تحلیلهای آیرودینامیک می‌باشد. در ادامه این بخش به بیان تعاریف و مقدماتی در مورد مکانیزم فرآیند گذار پرداخته می‌شود و پس از آن تاریخچه کارهای انجام شده در زمینه حل معادله اور-سامرفلد ارائه می‌گردد.

### مکانیزم فرآیند گذار

فرآیند گذار در جریانهای برشی محدود شونده با دیوار را می‌توان به صورت خلاصه در سه مرحله تشریح نمود. مرحله نخست، مرحله پذیرش (Receptivity) و یا نفوذ اغتشاشات خارجی به داخل لایه مرزی در جریان آرام است. منشاء این اغتشاشات ممکن است ناپایداریهای جریان آزاد، ناهمگنی، زبری سطوح، امواج صوتی منتشر شده در محیط یا ارتعاش جسم باشد. مرحله دوم، مرحله تقویت و رشد خطی اغتشاشات می‌باشد. این اغتشاشات که به صورت موجی شکل هستند به احترام تولمین و شیلیختینگ که برای اولین بار وجود آنها را مطرح نمودند به نام «امواج تولمین-شیلیختینگ» (T-S waves) نامگذاری شدند. شماتیکی از این امواج در شکل ۱ نمایش داده شده است. اما این مرحله از فرآیند گذار توسط تئوری پایداری خطی (Linear Stability Theory) مدل سازی شده و معادلات حاکم بر این اغتشاشات برای جریانهای غیرقابل تراکم همان معادله معروف اور-سامرفلد می‌باشد. آخرین و مهمترین مرحله در فرآیند گذار جریان، مرحله تقویت غیر خطی اغتشاشات و بهم ریختگی جریان به حالت مغشوش بوده که دارای ویژگیهای مهمی همچون سه بعدی بودن و سریع رخ دادن می‌باشد. در این مرحله اغتشاشات تا دامنه بزرگی رشد نموده و با همدیگر تداخل می‌کنند. مرحله رشد غیرخطی اغتشاشات تامغشوش شدن کامل جریان ادامه خواهدداشت.

طریق این روش وجود دارد. جوردینسون [۵] در سال ۱۹۷۰ با بکارگیری این روش و استفاده از یک الگوریتم تکرار شونده از روش پرتابی (Shooting Method)، حل دقیقی برای معادله اور-سامرفلد برای جریان بر روی یک صفحه تخت ارائه نمود. وی با فرض موازی بودن جریان از پروفیل سرعت بلازیوس در تحلیلش استفاده کرد. ماک (۱۹۷۶) و مونکوویتز (۱۹۷۸) به انتگرالگیری معادله اور-سامرفلد از مرز بالای ناحیه حل (مرز جریان آزاد) به سمت دیواره پرداختند و جوابهای مستقلی برای مقادیر گسترده ای از عدد رینولدز بدست آوردند. آنها برای جلوگیری از اینکه حلهای معادله نسبت به هم وابسته خطی بدست نیاید، از تمهیدات خاصی استفاده کردند. ماک از روش اورتونرمال سازی گرام-اشمیت (Gram-Schmidt Orthonormalization) و منکوویتز از روش شبه اورتونرمال سازی (Pseudo Orthogonalization) بهره برد. ون استیجن و ون دی وورن [۶] در سال ۱۹۸۰ به کمک روش تفاضل محدود حل دقیق دیگری برای معادله اور-سامرفلد با همان فرض موازی بودن جریان بدست آوردند. جهت پیشروی آنها بر روی ناحیه حل، از ناحیه جریان آزاد به سمت دیواره بود. آنها برای جلوگیری از وابسته خطی شدن جوابها به یکدیگر از روش کاهش مرتبه به جای اورتونرمال سازی تکراری استفاده کردند.

اما حل معادله اور-سامرفلد به روش بسط طیفی نیز امکان پذیر می باشد. در این روش از بسط دادن تابع حل معادله یعنی تابع دامنه اغتشاش به صورت یک ترکیب خطی از توابع متعامد استفاده می گردد. یکی از مناسب ترین این توابع برای حل معادله اور-سامرفلد سری چند جمله ای چبی شف (Chebyshev Polynomials) است که در واقع منطبق بر سری کسینوسی فوریه می باشد. گری و هلگاسون (۱۹۷۰)، اورزاگ [۷] (۱۹۷۱)، داناباسگلو و برینگن [۸] (۱۹۸۹) و هیگمن (۱۹۹۷) با استفاده از روش طیفی، پایداری جریان را بررسی کرده و پاسخهای معادله اور-سامرفلد و پارامترهای عدد موج، فرکانس موج و سرعت فازی موج را در گستره رینولدزهای زیادی محاسبه نمودند. اورزاگ از بسط چند جمله ایهای چبی شف و الگوریتم مقدار ویژه ماتریسی QR برای حل معادله اور-سامرفلد استفاده نمود و نشان داد که روش بسط طیفی نسبت به روشهای تفاضل محدود در حل معادله اور-سامرفلد دارای مزیتهای محاسباتی می باشد. وی بیان کرد با توجه به اینکه جریانهای برشی دارای گرادینهای شدیدی در نزدیکی مرزها هستند، باید برای حل بهتر در آن نواحی، گسسته سازی دقیقتری انجام شود. در روشهای عددی تفاضل محدود از اثر تعداد معدودی از نقاط اطراف نقطه محاسباتی برای محاسبه مشتقات مراتب مختلف استفاده می گردد. در حالیکه در روش طیفی برای محاسبه مشتق در یک نقطه خاص اثر کل مجموعه نقاط بر آن نقطه منظور می شود چون از یک تابع پیوسته بعنوان تقریب حل مساله استفاده شده است. همچنین در این روش برای نقاط اولیه پس از مرزها در فضای محاسباتی کلا از اثر نقاط پایین دست استفاده می شود که منجر به دقت بالایی از خواص فیزیکی می گردد. در واقع چند جمله ایهای چبی شف بطور طبیعی نقاط مجاور نواحی مرزی را به صورت نزدیک به هم دسته بندی

(متمرکز سازی خوشه ای) می کنند و از این حیث دقت بیشتری نسبت به روشهای تفاضل محدود دارند که از یک گسسته سازی یکنواخت استفاده می کند. مهمترین مشکل این روش نیز ناشی از همین مزیت محاسباتی است که تعداد بسیار بیشتر محاسبات را برای حل معادله نسبت به روشهای تفاضل محدود تحمیل می کند [۷].

در این تحقیق برای حل معادله اور-سامرفلد از روش تفاضل محدود و تبدیل آن معادله به یک معادله ماتریسی استفاده شده است که روش تفاضل محدود بکار گرفته شده وابستگی زیادی به حدس اولیه دارد و چنانچه مقادیر مناسبی به عنوان حدس اولیه برای پارامترهای مورد نیاز منظور نگردد امکان واگرایی روش وجود دارد. از اینرو برای فائق آمدن بر مشکلات همگرایی این روش تمهیداتی در نظر گرفته شده است که شامل استفاده از روش تکرار نیوتون برای حل دستگاههای غیر خطی و همچنین تعیین رابطه ای برای محاسبه حدس اولیه پارامترهای مورد نیاز در یک نقطه محاسباتی خاص از روی پاسخ معادله اور-سامرفلد برای همان پارامترها در نقطه محاسباتی قبلی می باشد [۴، ۹، ۱۰ و ۱۱].

افراد دیگری نیز نظیر مالیک (۱۹۸۰)، سبسی (۱۹۸۰)، آرناال (۱۹۸۴)، هوانگ (۱۹۹۴)، متا (۲۰۰۴) و کرومبین (۲۰۰۸) تحلیل پایداری جریان به کمک حل معادله اور-سامرفلد را در کارهای خود توسط روشهای عددی انجام داده اند.

اما همانطور که گفته شد در این تحقیق از روش  $e^N$  برای تعیین نقطه گذار جریان استفاده شده است. این روش که به روش اسمیت نیز معروف است اولین بار توسط اسمیت و گامبرونی و به طور مستقل توسط ون اینگن با عنوان روش  $e^9$  در سال ۱۹۵۶ ارائه شد و بعدها به روش  $e^N$  تغییر نام پیدا کرد. در این روش با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور-سامرفلد، برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می شود. باید دانست که این روش مکانیزم غیرخطی گذار جریان را پیش بینی نمی کند، بلکه نقطه ای را که در آن اغتشاشات جریان به حد کافی رشد کرده اند و توانایی تبدیل رژیم جریان به رژیم کاملاً مغشوش را دارند، تعیین می نماید. کارهای زیادی برای پیش بینی گذار با استفاده از این روش برای جریانهای دوبعدی و سه بعدی انجام شده است که در اینجا به برخی از آنها اشاره می گردد.

گاسپراس در سال ۱۹۸۹ نتایج تحقیق خود در تعیین گذار برای جریان بر روی یک صفحه تخت در رژیم فوق صوتی را ارائه کرد. دامنه عدد ماخ در جریان بررسی شده توسط وی بین عدد ماخ ۳ و ۶ بود که در هر عدد ماخ، وی توان  $N$  مورد نیاز برای روش  $e^N$  را از داده های تجربی استخراج نمود. او نشان داد که عدد ماخ اثر پایدار کننده بر جریان دارد یعنی با افزایش عدد ماخ نقطه گذار به پایین دست جریان منتقل می گردد. در سال ۱۹۹۶ ماسد و مالیک به بررسی حساسیت توان  $N$  در روش  $e^N$  و عوامل تاثیر گذار در نحوه تعیین آن از روی نتایج تجربی پرداختند. آنها تاثیر عواملی نظیر عدد ماخ، انتقال حرارت سطح و اعمال مکش بر روی دیواره بر توان  $N$  را تحلیل کردند. استوک و هاسه [۱۲] در سال ۱۹۹۹ در مقاله ای به بررسی مساله طراحی ایرفویلهای با جریان آرام و نقش گذار جریان

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (4)$$

شایان ذکر است که معادلات ناویر-استوکس ارائه شده به شکل بدون بعد هستند که برای بی بعد کردن کمیت های آن از مقادیر جریان آزاد استفاده شده است.

### مدل توربولانسی

برای محاسبات جریان آرام، ضریب ویسکوزیته ملکولی  $\mu_l$  از قانون ساترلند (Sutherland's Law) مطابق رابطه زیر بدست می آید:

$$\mu_l = T^{3/2} \left( \frac{T_\infty + 110.4}{T T_\infty + 110.4} \right) \quad (5)$$

برای محاسبات جریان مغشوش از یک مدل جبری استفاده می شود که بر طبق آن ضریب ویسکوزیته ملکولی  $\mu$  در معادلات ناویر-استوکس از رابطه زیر تعیین می گردد:

$$\mu = \mu_l + \mu_t \quad (6)$$

که در آن  $\mu_t$  ضریب ویسکوزیته ملکولی توربولانسی می باشد که از طریق مدل جبری ویسکوزیته گردابه ای (Eddy-Viscosity) مربوط به مدل بالدوین-لوماکس محاسبه می شود. این مدل که یک مدل شناخته شده و رایج در زمینه آیرودینامیک می باشد، یک مدل دولایه ای است و بر مبنای طول اختلاط پراتل بنا نهاده شده است.

### روش عددی

روش عددی استفاده شده برای حل معادلات حاکم بر جریان روش TVD می باشد که معادلات مزبور را به روش ضمنی حل می کند. روشهای عددی TVD یا تغییرات کل از بین رونده، به روشهایی گفته می شود که در آنها تغییرات کل حل هر جواب فیزیکی قابل قبول با افزایش زمان در فضای حل بتدریج کم و محو میشود. از نقطه نظر تقریب تفاضل محدود، از روشهای TVD متقارن (Symmetric) و بالادست (Upwind) استفاده شد که توسط یی (Yee) برای حل جریان لزوج ارائه شده اند و توسط صداقت اصلاح گشته اند [۱۳]. در تحقیق حاضر از روش TVD متقارن با تابع محدود کننده شار Minmod به دلیل دقت بالاتر آن برای جریانهای زیرصوتی استفاده شده است. شرایط اولیه مورد نیاز کلیه پارامترها برای حل جریان برابر مقادیر جریان آزاد آنها منظور شده اند. همچنین عدد رینولدز، عدد ماخ و زاویه حمله به صورت ورودی به کد حل کننده جریان داده می شوند.

شبکه بندی استفاده شده حول ایرفویل یک شبکه C-شکل هایپربولیک بوده که توسط یک تولید کننده شبکه جبری درون کد ایجاد می گردد. فاصله مرزهای این شبکه تا سطح ایرفویل در حدود ۱۰ تا ۱۵ برابر طول وتر ایرفویل می باشد. همچنین تمرکز نقاط شبکه با دور شدن از نزدیکی سطح ایرفویل کاهش می یابد. یک

در آن پرداختند. آنها در تحقیق خود از روش  $e^N$  برای پیش بینی گذار استفاده کردند و برای ارزیابی آن از مقایسه نتایج خود با نتایج تجربی ایرفویل DOAL3 بهره گرفتند. نتایج پژوهش لیان و شای [۱] در مورد مساله پیش بینی گذار بر روی ایرفویل های صلب و انعطاف پذیر در رینولدزهای پایین در سال ۲۰۰۷ منتشر شد. آنها در تحلیل خود برای حل دقیق جریان بر روی ایرفویل با تعیین نقطه گذار از طریق روش  $e^N$ ، رژیمهای آرام و مغشوش جریان را به طور جداگانه حل نمودند. در مقایسه نتایج آنها با نتایج تجربی برای پارامترهای نقطه گذار و سایر ضرایب آیرودینامیکی جریان، تطابق خوبی مشاهده شد. اخیراً و در سال ۲۰۰۸ نیز کلیکوئت و همکارانش به بررسی کاربرد مساله گذار در محاسبات ناویر-استوکس در مرکز اونرا (Onera) فرانسه پرداختند. آنها برای تحلیل جریان عبوری حول یک ایرفویل دوبعدی معادلات متوسط گیری شده ناویر-استوکس کوپل شده با مدل گذار  $e^N$  را حل کردند.

### معادلات حاکم برای حل جریان

معادلات حاکم بر جریان عبوری حول ایرفویل معادلات ناویر-استوکس دوبعدی تراکم پذیر هستند که با صرف نظر از نیروهای حجمی (body forces) و گرمایش حجمی (Volumetric heating) در مختصات نگاشت یافته (transformed coordinate) به فرم زیر قابل نمایش می باشند [۱۳]:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\hat{U} &= U/J \\ \hat{F} &= (\xi_x F + \xi_y G) / J \\ \hat{G} &= (\eta_x F + \eta_y G) / J\end{aligned}\quad (2)$$

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

و  $\xi = \xi(x, y)$  و  $\eta = \eta(x, y)$  توابع تبدیل مختصات از مختصات کارتزین  $(x, y)$  به مختصات منطبق بر جسم  $(\xi, \eta)$  می باشند.  $J$  ژاکوبین تبدیل مختصات است و بردارهای  $U$ ،  $F$  و  $G$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e + P)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ P + \rho v^2 - \tau_{yy} \\ (e + P)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix}$$

که در روابط فوق  $\rho$ ،  $u$ ،  $v$ ،  $e$  و  $q$  به ترتیب چگالی، مولفه های سرعت در جهتهای  $x$  و  $y$ ، انرژی کل به ازای واحد حجم و شار حرارتی می باشند. مولفه های تانسور تنش برشی نیز از روابط زیر تعیین می شوند:

نمونه از شبکه بندی  $101 \times 141$  حول ایرفویل NACA 0012 در شکل ۳ آورده شده است.

### تحلیل پایداری جریان

در این تحقیق تحلیل پایداری جریان به کمک تئوری پایداری خطی صورت می پذیرد. با اعمال تئوری پایداری خطی به معادلات ناویر-استوکس، معادله اور-سامرفلد حاصل می شود که توسط آن می توان تغییرات و رشد و نمو امواج T-S را تحلیل و پیش بینی نمود. معادله اور-سامرفلد در واقع تقریبی از معادلات حاکم بر رشد یا کاهش دامنه یک اغتشاش دوبعدی در جریانهای موازی می باشد. همانطور که در بخشهای قبل نیز ذکر شد معادلات حاکم بر سیال تراکم ناپذیر لزج معادلات پیوستگی و مومنتم هستند، که می توان آنها را به فرم زیر نوشت:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (7)$$

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 V$$

که در معادلات اخیر اپراتور گرادینان به فرم  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  و اپراتور مشتق کامل به فرم  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z}$  تعریف می شود و  $V = (U, V, W)$  نیز بردار سرعت میدان سیال می باشد.

برای بدست آوردن معادله اور-سامرفلد از معادلات فوق باید مولفه های لحظه ای سرعت و فشار  $u', v', w'$  و  $p'$  را به مقادیر متوسط آنها اضافه کرد و از ترمهای لحظه ای به علاوه ترمهای متوسط آنها به فرم زیر در معادلات مزبور استفاده نمود [۲]:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (8)$$

اما همانطور که گفته شد معادله اور-سامرفلد برای جریانهای موازی بکار می رود و طبق تعریف، به جریانی موازی گفته می شود که سرعت متوسط سیال در امتداد یک خط جریان تغییر نکند. با فرض اینکه جریان در جهت X باشد، سرعتهای متوسط سیال در جهتهای Y و Z صفر در نظر گرفته می شوند:  $\bar{v} = \bar{w} = 0$  همچنین فرض می شود که مولفه X سرعت جریان فقط تابعی از Y باشد. یعنی:  $\bar{u} = f(y)$  بنابراین مشتقات آن نسبت به X و Z در تمامی میدان جریان صفر خواهد بود ( $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0$ ). جریانهایی نظیر جریان داخل کانل یا جریان داخل لوله نمونه هایی از جریانهای موازی هستند اما جریان بر روی یک صفحه تخت و همچنین جریان عبوری حول یک ایرفویل که در این تحقیق موضوعات مورد بررسی می باشند اثراتی از ناموازی بودن جریان را در خود دارند. اگر بخواهیم این اثرات را نیز در تحلیل پایداری در نظر بگیریم معادله اور-سامرفلد به یک معادله غیر خطی پیچیده تبدیل می گردد، لیکن بدون منظور کردن اثرات ناموازی بودن برای دو جریان یاد شده، پاسخهای تحلیل پایداری با هدف پیش بینی گذار انحراف چندانی از

نتایج واقعی نخواهند داشت. هر چند نمودارهای پایداری بدست آمده توسط این تحقیق و کارهای افراد دیگر مطابقت کامل با نمودارهای پایداری تجربی ندارند. ولی همانگونه که گفته شد به دلیل استفاده از روش  $e^N$  برای پیش بینی گذار که یک روش نیمه تجربی است و بهمین خاطر همبستگی مناسبی با داده های تجربی دارد، حتی با اعمال فرض موازی بودن در جریانهای روی صفحه تخت و حول یک ایرفویل نتایج مربوط به گذار جریان همخوانی بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد. شایان ذکر است که این فرض، فرض بسیار رایجی در زمینه تحلیل پایداری جریانهای خارجی است و در کارهای بسیاری از محققان صاحب نظر در این زمینه نظیر جوردینسون، سبسی، برینگن، آرنا و .... مشاهده می گردد [۴، ۵، ۸].

در ادامه می بایست معادلات متوسط پیوستگی و مومنتم (معادلات ۷) را از معادلات اغتشاشی شده آنها کم کرد. باید در نظر داشت که مطابق نظریه پایداری خطی، ترمهای اغتشاشی به اندازه کافی کوچک فرض می شوند و در نتیجه حاصل ضرب مرتبه دوم آنها نظیر  $u'w', u'v', \frac{\partial u'}{\partial x}$  و... قابل صرف نظر کردن هستند. سپس با اعمال نظریه اسکوائر (Squire's Theorem) مسأله ناپایداری سه بعدی جریان در یک عدد رینولدز خاص به یک مسأله معادل دوبعدی در یک عدد رینولدز پایینتر تبدیل می گردد. در چنین حالتی باید دو محور افقی X و Z، دقیقاً به یک محور در جهت انتقال موج تبدیل شوند. پس از انجام عملیات ذکر شده، معادلات زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} &= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} &= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v' \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

با حذف متغیر  $p'$  از دو معادله اول، معادله زیر بدست می آید که معادله ورتیسیتیه برای اغتشاش است:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - v' \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (10)$$

در بدست آوردن معادله اور-سامرفلد، مرسوم است که معادلات اخیر بر حسب متغیر تابع جریان اغتشاشی که به صورت زیر تعریف می شود، نوشته شوند.

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (11)$$

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (12)$$

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \alpha \phi(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)] \quad (13)$$

که در معادلات فوق  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  فرکانس زاویه ای یک جزء اغتشاشی و  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  عدد موج اغتشاش می باشد که هر دو کمیتهای مختلط هستند. عدد موج با رابطه  $\alpha = 2\pi/\lambda$  به طول موج  $\lambda$  مربوط می شود. با جایگذاری روابط (۱۲) و (۱۳) در رابطه (۱۰) و بازنویسی آن خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} = \nu \nabla^2 \xi \quad (14)$$

که در معادله فوق  $\xi$  ورتیسسته است که طبق رابطه زیر تعریف می شود:

$$\xi = -\nabla^2 \psi = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (15)$$

اینک با جایگزینی معادلات (۱۱) و (۱۵) در معادله (۱۴) و بی بعد سازی یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم برای متغیر مختلط دامنه اغتشاش  $\Phi$  به شکل زیر بدست می آید که اولین بار به طور مستقل توسط اور در سال ۱۹۰۷ و سامرفلد در سال ۱۹۰۸ ارائه شد که به احترام آنها به معادله اور-سامرفلد معروف است:

$$(u-c)(D^2 - \alpha^2)\phi - \frac{d^2 u}{dy^2} \phi = \frac{-i}{\alpha \text{Re}} (D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4)\phi \quad (16)$$

در معادله فوق  $D = \frac{d}{dy}$  اپراتور مشتق نسبت به  $y$  می باشد. باید توجه داشت که برای بی بعد سازی معادله اور-سامرفلد از کمیت‌های سرعت جریان آزاد  $U_\infty$  و طول مشخصه  $L^* = \sqrt{\frac{v^* x^*}{U_\infty^*}}$  که در تحلیل‌های تشابهی لایه مرزی بکار می رود استفاده شده است. بنابراین عدد رینولدز در محاسبات مربوط به تحلیل پایداری مطابق رابطه زیر تعیین می گردد:

$$\text{Re} = \frac{U_\infty^* L^*}{v^*} = \frac{U_\infty^*}{v^*} \sqrt{\frac{v^* x^*}{U_\infty^*}} = \sqrt{\frac{U_\infty^* x^*}{v^*}} = \sqrt{\text{Re}_x} \quad (17)$$

لیکن مرسوم است که در تحلیل‌های پایداری جریان‌های لایه مرزی از کمیت ضخامت جابجایی لایه مرزی  $\delta^*$  (displacement thickness) برای محاسبه عدد رینولدز استفاده شود. ضخامت جابجایی لایه مرزی از رابطه  $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$  بدست می آید که با جایگذاری پروفیل‌های سرعت مربوط به حلهای تشابهی جریان‌های خارجی در رژیم آرام خواهیم داشت:

$$\frac{\delta^*}{x} = m \text{Re}_x^{-1/2}, \quad m = 1.7207876573 \quad (18)$$

حال با استفاده از رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$\delta^* = \frac{mx^*}{\sqrt{\frac{U_\infty^* x^*}{v^*}}} = m \sqrt{\frac{v^* x^*}{U_\infty^*}} = mL^* \quad (19)$$

بنابراین با توجه به رابطه اخیر و رابطه (۱۷) می توان عدد رینولدز مورد نیاز در تحلیل‌های پایداری را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\text{Re} = \frac{U_\infty^* \delta^*}{v^*} = \frac{U_\infty^* (mL^*)}{v^*} = m \sqrt{\text{Re}_x} \quad (20)$$

همچنین متغیرهای دیگر نیز به صورت زیر بی بعد شدند که متغیرهای ستاره دار متغیرهای فیزیکی دارای بعد می باشند:

$$\alpha = \alpha^* \delta^*, \quad \omega = \frac{\omega^* \delta^*}{U_\infty^*}, \quad c = \frac{c^*}{U_\infty^*} \quad (21)$$

پارامتر  $c$  نیز که بصورت  $c = \frac{\omega}{\alpha} = c_r + ic_i$  تعریف می شود، سرعت مختلط فاز انتقال اغتشاش می باشد.

### شرایط مرزی

شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادله اور-سامرفلد برای جریان بر روی یک صفحه تخت و همچنین جریان عبوری حول یک ایرفویل در این بخش بیان می شوند. بر روی دیواره  $y=0$ ، شرط عدم لغزش برای مولفه مماسی سرعت و عدم نفوذ برای مولفه عمودی سرعت و در نتیجه صفر شدن مولفه های اغتشاشی آنها  $u'=v'=0$  حاکم می باشد. با توجه به معادلات (۱۲) و (۱۳) این شرط مرزی را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$y=0, \quad \Phi=0, \quad \Phi'=0 \quad (22)$$

شرط مرزی دیگر به صورت ناپدید شدن اغتشاشات و در نتیجه سرعت‌های اغتشاشی در مرز جریان آزاد یا  $y \rightarrow \infty$  بیان می گردد ( $u'=v'=0$ ). مشابه شرط مرزی دیواره، به کمک معادلات (۱۲) و (۱۳) این شرط مرزی را نیز می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$y \rightarrow \infty, \quad \Phi=0, \quad \Phi'=0 \quad (23)$$

اما در تحلیل پایداری جریان‌های برشی، به بررسی ویژگی‌های جریان در درون لایه مرزی نیاز است. در خارج از لایه مرزی کمیت‌های  $u(u=U_\infty)$  و  $u''$  دارای مقادیر ثابت  $u=1$  و  $u''=0$  هستند. بدین ترتیب معادله اور-سامرفلد در این ناحیه به یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم با ضرایب ثابت تبدیل می گردد که پاسخ دقیق آن به صورت ترکیب خطی چهار حل مستقل به فرم زیر می باشد:

$$\phi(y) = Ae^{\alpha y} + Be^{-\alpha y} + Ce^{\sigma y} + De^{-\sigma y} \quad (24)$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 + i \text{Re}(\alpha u - \omega)$$

پاسخ فوق در ناحیه بیرونی لایه مرزی از  $y=\delta$  تا  $y \rightarrow \infty$  برقرار است. اعمال شرط مرزی جریان آزاد (رابطه ۲۳) بر پاسخ فوق منجر به یافتن  $A=C=0$  و همچنین مثبت بودن قسمت حقیقی ضرایب  $\alpha$  و  $\sigma$  می گردد. اعمال شرط همخوانی پاسخ‌های معادله اور-سامرفلد در نواحی درونی و بیرونی لایه مرزی نیز، دو شرط مرزی زیر را در لبه لایه مرزی،  $y=\delta$ ، نتیجه می دهد:

$$(D + \sigma)(D + \alpha)\phi = 0 \quad (1-25)$$

$$(D + \sigma)(D^2 - \alpha^2)\phi = 0 \quad (2-25)$$

### حل عددی معادله اور-سامرفلد

برای حل معادله اور-سامرفلد در یک جریان خاص نیاز به پروفیل‌های سرعت جریان و مشتق دوم آن درون لایه مرزی  $u(y)$  و  $u''(y)$ ، در راستای عمود بر سطح و در هر مقطع در امتداد جریان می باشد. موارد ذکر شده از حل دقیق جریان آرام توسط کد عددی TVD بدست می آیند. کمیت‌های دیگری که لازم است از کد حل کننده جریان استخراج گردند محل اعمال شرط لبه لایه مرزی،  $y_{edge} = \frac{y}{6\delta^*}$ ، سرعت لبه لایه مرزی،  $U_{edge}$  که سرعت در  $y_{edge}$  می باشد و ضخامت جابجایی لایه مرزی  $\delta^*$  می باشد. همچنین در جریان حول ایرفویلها، مشخصه مکانی جریان فاصله هر نقطه روی سطح ایرفویل

$$\bar{\delta}_j = \begin{bmatrix} \phi_j \\ s_j \\ f_j \\ g_j \end{bmatrix} \quad \bar{r}_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$(r_1)_j = (r_2)_j = (r_3)_j = (r_4)_j = 0, \quad 0 \leq j \leq J$$

با توجه به همگن بودن معادلات اخیر و همچنین همگن بودن شرایط مرزی آنها در جریانهای مزبور، جوابهای معادله نسبت به هم وابسته خطی بدست می آیند و در نتیجه حل معادله اور-سامرفلد به حل یک مسأله مقدار ویژه (Eigenvalue Problem) تبدیل می گردد. برای یافتن جواب غیر همگن یا همان جواب فیزیکی مسأله باید یکی از شرایط مرزی همگن را با یک شرط مرزی غیر همگن جایگزین کرد. برای این کار شرط مرزی  $\Phi'(0)=0$  (که همان شرط  $f_0=0$  است) را با شرط مرزی  $\Phi''(0)=1$  (که معادل با شرط  $s_0=1$  می شود) جایگزین می کنیم. حال از آنجائیکه  $\Phi''(0) \neq 0$  است، معادله دارای جواب غیر همگن است و باید به دنبال محاسبه پارامترهایی باشیم که به ازاء آنها شرط مرزی اصلی حذف شده برقرار گردد. این کار با استفاده از یک فرآیند جستجوگر تکرار شونده بر مبنای روش نیوتون انجام می شود.

با توجه به مجموعه معادلات (28) و شرایط مرزی (30) و (31)

می توان گفت که حل معادله ماتریسی (32) به سه پارامتر  $\omega$ ,  $\alpha$  و  $\text{Re}$  بستگی دارد که این موضوع را می توان به شکل  $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\alpha, \omega, \text{Re})$  نمایش داد. با در نظر گرفتن اینکه  $\alpha$  و  $\omega$

کمیت‌های مختلط هستند، به مساله ای با پنج مجهول مواجه می شویم که برای حل آن باید با تعیین مقادیر اولیه ای برای سه تا از آنها به دنبال یافتن دو مجهول باقیمانده باشیم. این کار باید در یک فرآیند تکرار به نحوی انجام شود که شرط مرزی محذوف  $\Phi'(0)=0$  در  $y=0$  برقرار گردد. در واقع باید از یک مرز شروع به حل کرد و به سمت مرز دیگر پیشروی نمود و مقدار شرط مرزی واقعی محذوف در آن مرز را محاسبه کرد و هنگامی که اختلاف مقدار محاسباتی آن با مقدار حقیقی بسیار کوچک گردد، در آن مرحله پاسخ معادله به اندازه کافی دقیق خواهد بود و حل عددی متوقف می شود [3]. بنابراین می توان رابطه اخیر را به صورت زیر هم نشان داد:

$$f_0(\alpha, \omega, \text{Re}) = 0 \quad (34)$$

اکنون الگوریتم عددی حل این معادله برای تحلیل پایداری مکانی شرح داده می شود. تحلیل پایداری زمانی نیز مشابه همین روشی است که ذکر خواهد شد. در ناپایداری مکانی به بررسی پایداری جریان در طول مکان در جهت X پرداخته می شود. به توجه به رابطه (11) با در نظر گرفتن  $\omega_i=0$ ، فرض می شود که هیچ تغییری نسبت به زمان برای دامنه موجهای اغتشاشی رخ نمی دهد. سپس با مقداردهی به  $\alpha_i$  و یکی دیگر از سه مجهول  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  و  $\text{Re}$  به حل معادله (34) برای دو مجهول دیگر پرداخته می شود. انتخاب دو مجهول دیگر به شیب  $\frac{d\alpha_r}{d\text{Re}}$  بستگی دارد. برای مثال در نواحی دور از عدد رینولدز بحرانی که  $\frac{d\alpha_r}{d\text{Re}}$  کوچک می باشد، مناسب است

از لبه حمله،  $S$ ، در نظر گرفته می شود که مطابق رابطه زیر تعیین می گردد:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (26)$$

بدین ترتیب می توان عدد رینولدز مورد نیاز در تحلیل‌های پایداری را با توجه به رابطه (20) در هر مقطع جریان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\text{Re} = m \sqrt{\text{Re}_s} = m \sqrt{\frac{U_{edge}^* s^*}{\nu^*}} \quad (27)$$

در این بخش حل عددی معادله اور-سامرفلد در یک مقطع خاص ارائه می گردد. بدیهی است که این الگوریتم برای کلیه مقاطع جریان قابل استفاده می باشد. اگر معادله اور-سامرفلد به همراه شرایط مرزی آن برای جریان بر روی یک صفحه تخت و یا برای جریان عبوری حول یک ایرفویل که با روابط (16)، (22) و (25) بدست آمده اند، در نظر گرفته شوند آنگاه می توان با تعریف یک سری متغیر جدید، معادله مرتبه چهارم اور-سامرفلد را به چهار معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد [4]. با تعریف متغیرهای زیر:

$$\phi' = f \quad (1-28)$$

$$f' = s + \zeta_1^2 \phi \quad (2-28)$$

$$s' = g \quad (3-28)$$

می توان معادله اور-سامرفلد را به فرم زیر نوشت:

$$g' = \zeta_2^2 s - \zeta_3 \phi \quad (4-28)$$

ثوابت استفاده شده در روابط فوق به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\zeta_1 = \alpha \quad (29)$$

$$\zeta_2^2 = \alpha^2 + i \text{Re}(a\omega - \omega) \quad (29)$$

$$\zeta_3 = i \text{Re} a\omega \quad (29)$$

با استفاده از این متغیرهای جدید، شرایط مرزی معادله به صورت زیر در می آیند:

$$y = 0, \quad \Phi = 0, \quad f = 0 \quad (30)$$

$$y = \delta, \quad s + (\zeta_1 + \zeta_2)f + \zeta_1(\zeta_1 + \zeta_2)\phi = 0 \quad (1-31)$$

$$y = \delta, \quad g + \zeta_2 s = 0 \quad (2-31)$$

حال باید بر روی شبکه عمود بر دیواره - از  $y=0$  که با  $y_0$  نمایش داده می شود تا  $y=\delta$  که با  $y_1$  نمایش داده می شود- به دنبال محاسبه مقادیر متغیرهای  $(f, s, g, \Phi)$  باشیم که در هر نقطه  $y_j$  از شبکه به صورت  $(f_j, s_j, g_j, \Phi_j)$  نشان داده می شوند. با نوشتن تقریب تفاضل محدود مجموعه معادلات (28) حول نقطه میانی  $y_{j-1/2}$  و استفاده از رابطه تفاضل مرکزی برای مشتقات موجود، گسسته سازی مجموعه معادلات مزبور انجام می شود که اینکار منجر به تبدیل آن معادلات به یک معادله ماتریسی به فرم زیر می گردد:

$$A \bar{\delta} = \bar{r} \quad (32)$$

که در آن  $A$  یک ماتریس سه قطری بلوکی (block tridiagonal) از ضرایب با ابعاد  $[4 \times (J+1)] \times [4 \times (J+1)]$  (که  $J$  تعداد نقاط شبکه درون لایه مرزی می باشد)،  $\delta$  بردار مجهولات و  $\Gamma$  بردار مقادیر معلوم هستند که هر کدام دارای ابعاد  $4 \times (J+1)$  می باشند. اما هر یک از المانهای بردارهای  $\delta$  و  $\Gamma$  خود یک بردار  $4 \times 1$  به فرم زیر هستند:

رینولدز خاص  $Re_0$  مقادیر ویژه معادله اور-سامرفلد بدست آمد، آنگاه باید برای تعیین حدس اولیه برای پارامترهای  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  در یک عدد رینولدز جدید از عملیات زیر استفاده کرد. با توجه به اینکه مقدار  $\alpha_i$  ثابت فرض شده است، پارامترهای  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  فقط تابع عدد رینولدز می باشند. حال با بسط این پارامترها از طریق سری تیلور خطی حول  $Re_0$  خواهیم داشت:

$$\alpha_r = (\alpha_r)_0 + \left( \frac{\partial \alpha_r}{\partial Re} \right)_0 \delta Re \quad (1-38)$$

$$\omega_r = (\omega_r)_0 + \left( \frac{\partial \omega_r}{\partial Re} \right)_0 \delta Re \quad (2-38)$$

که در روابط اخیر  $\delta Re = Re - Re_0$  بوده و زیرنویس صفر نمایانگر مقادیر پارامترها در  $Re = Re_0$  می باشد.

### روش $e^N$

در این تحقیق تعیین نقطه گذار جریان با استفاده از روش  $e^N$  انجام شد. در این روش با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور-سامرفلد، برای تعیین میزان رشد امواج اغتشاشی استفاده می شود. باید دانست که این روش مکانیزم غیرخطی گذار جریان را پیش بینی نمی کند، بلکه نقطه ای را که در آن اغتشاشات جریان به حد کافی رشد کرده اند و توانایی تبدیل رژیم جریان به رژیم کاملا مغشوش را دارند، تعیین می نماید. با توجه به اینکه در این روش به دنبال مکان آغاز گذار جریان هستیم و همچنین دامنه اغتشاش امواج ناپایدار در یک نقطه خاص مستقل از زمان می باشد بنابراین به نتایج تحلیل پایداری مکانی از حل معادله اور-سامرفلد نیاز است. اما فرض اساسی در این روش این است که گذار هنگامی رخ می دهد که دامنه اغتشاشات کوچکی که در ناحیه پایداری خنثی وجود دارند (موجهای T-S)، در ناحیه گذار با ضریب  $e^N$  تقویت شوند. باید دانست که مقدار  $N$  از داده های تجربی تعیین می شود و برای هر نوع جریان دارای یک مقدار خاص است. برای جریانهای دوبعدی معمولا مقدار  $N$  بین ۷ و ۹ منظور میگردد [۱۴]. حال با توجه به فرض گفته شده، می توان نوشت:

$$\frac{|\psi|_{tr}}{|\psi|_{ne}} = e^N \quad (39)$$

که زیرنویسهای  $tr$  و  $ne$  به ترتیب بیانگر نقطه گذار (transition) و نقطه ای روی منحنی پایداری خنثی با  $\alpha_i = 0$  (neutral) می باشد. حال اگر در معادله تابع جریان اغتشاشی (رابطه ۱۱) دامنه متغیرهای سمت راست و چپ معادله را با توجه به اینکه در تحلیل پایداری مکانی فرض  $\omega_i = 0$  اعمال می گردد، در نظر بگیریم، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$|\psi| = |\phi(y)| * \exp[-\alpha_i x] \quad (40)$$

آنگاه با مشتق گیری لگاریتمی از آن نسبت به  $x$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{|\psi|} \frac{d|\psi|}{dx} = -\alpha_i \quad (41)$$

اگر رابطه اخیر را به فرم  $d(\ln |\psi|) = -\alpha_i dx$  بازنویسی کنیم آنگاه با انتگرال گیری از آن خواهیم داشت:

که با ثابت فرض کردن  $Re$  معادله را برای دو پارامتر  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  حل می کنند. در نزدیکی عدد رینولدز بحرانی که  $\frac{d\alpha_r}{dRe}$  بزرگ است و با  $Re \rightarrow Re_{cr}$  بزرگتر هم می شود، لازم است که با مقدار دهی به  $\alpha_r$  معادله برای دو مجهول  $Re$  و  $\omega_r$  حل شود.

اما برای حل معادله (۳۴) با توجه به اینکه  $f_0$  یک کمیت مختلط است پس رابطه مزبور نمایانگر دو معادله می باشد (قسمتهای حقیقی و موهومی). لذا برای تعیین دو مجهول  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  دو معادله در اختیار داریم که برای حل آنها با استفاده از روش تکرار نیوتون برای حل دستگاههای غیر خطی به شرح زیر عمل می کنیم. اگر فرض شود که  $(\alpha_r^v, \omega_r^v)$  مقادیر کمیت‌های مجهول در تکرار  $v$ -ام باشند، مقادیر آنها در تکرار  $v+1$ -ام مطابق روابط زیر تعیین می گردد:

$$\alpha_r^{v+1} = \alpha_r^v + \delta \alpha_r^v \quad (1-35)$$

$$\omega_r^{v+1} = \omega_r^v + \delta \omega_r^v \quad (2-35)$$

اما با بسط تیلور قسمتهای حقیقی و موهومی  $f_0$  در معادله (۳۴) حول  $(\alpha_r^v, \omega_r^v)$  به طور جداگانه و نگه داشتن ترمهای خطی به یک سیستم خطی معادلات به صورت زیر می رسیم که با قرار دادن  $f_i^{v+1} = 0$  و  $f_r^{v+1} = 0$  خواهیم داشت:

$$f_r^v + \left( \frac{\partial f_r}{\partial \alpha_r} \right)^v \delta \alpha_r^v + \left( \frac{\partial f_r}{\partial \omega_r} \right)^v \delta \omega_r^v = 0 \quad (1-36)$$

$$f_i^v + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_r} \right)^v \delta \alpha_r^v + \left( \frac{\partial f_i}{\partial \omega_r} \right)^v \delta \omega_r^v = 0 \quad (2-36)$$

در روابط فوق برای صرفه جویی در امر نگارش زیرنویس صفر از  $f$  حذف شده است. همچنین از زیرنویسهای  $r$  و  $i$  برای مشخص کردن قسمتهای حقیقی و موهومی  $f$  بر روی دیواره استفاده شده است. حل دستگاه معادلات (۳۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta \alpha_r^v = \frac{1}{\Delta_0} \left[ f_i^v \left( \frac{\partial f_r}{\partial \omega_r} \right)^v - f_r^v \left( \frac{\partial f_i}{\partial \omega_r} \right)^v \right] \quad (1-37)$$

$$\delta \omega_r^v = \frac{1}{\Delta_0} \left[ f_r^v \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_r} \right)^v - f_i^v \left( \frac{\partial f_r}{\partial \alpha_r} \right)^v \right] \quad (2-37)$$

که در آن:

$$\Delta_0 = \left( \frac{\partial f_r}{\partial \alpha_r} \right)^v \left( \frac{\partial f_i}{\partial \omega_r} \right)^v - \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_r} \right)^v \left( \frac{\partial f_r}{\partial \omega_r} \right)^v \quad (3-37)$$

اما برای تعیین کمیت  $\Delta_0$  نیاز به محاسبه مشتقات  $f_r$  و  $f_i$  نسبت به  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  داریم که برای محاسبه آنها باید مشتقگیری از معادله ماتریسی (۳۲) را انجام دهیم. به معادلات حاصل شده معادلات وردشی (Variational Equations) معادله ماتریسی (۳۲) نسبت به  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  گفته می شود.

نکته دیگری که در حل عددی معادله اور-سامرفلد باید بدان اشاره گردد تمهیدی است که برای همگرایی سریعتر کد عددی صورت گرفته است. این کار به صورت تعیین رابطه ای برای محاسبه حدس اولیه پارامترهای مورد نیاز می باشد. هنگامی که در یک عدد



گیرد برابر ۵۲۰ می باشد. این نقطه در واقع کوچکترین عدد رینولدزی را نشان می دهد که در آن، اغتشاشات میرا نمی شوند. در واقع، در این نقطه، اغتشاشات کوچک ایجاد شده - که همان موجهای دو بعدی تولمین-شلیختینگ هستند- تدریجا تقویت شده و به گردابه های سه بعدی کاملا ناپایدار تبدیل می گردند. باید در نظر داشت که این نقطه نباید با نقطه تحول به حالت مغشوش که عدد رینولدز بالاتری دارد، اشتباه گرفته شود. به دلیل تطابق کامل منحنی های پایداری لایه مرزی بلازیوس با نتایج افراد دیگر [۵]، مقایسه نتایج اخیر روی شکل صورت نگرفته است. بلکه این کار در چندین عدد رینولدز برای پایداری خنثی در جدول ۱ انجام شده است.

**جدول ۱- مقایسه نتایج کد حاضر با نتایج مرجع [۵] برای دو کمیت عدد موج و فرکانس اغتشاشی در تحلیل پایداری جریان بر روی صفحه تخت**

Re	$\alpha_r$		$\omega_r$	
	Present Code	Jordinson[5]	Present Code	Jordinson[5]
۲۶۰۰ (up)	۰/۲۹۷۲۸۶	۰/۲۹۷۳	۰/۰۹۴۷۳۶	۰/۰۹۴۷
۱۴۰۰ (up)	۰/۳۳۵۸۱۳	۰/۳۳۵۹	۰/۱۱۸۴۹۳	۰/۱۱۸۵
۸۵۰ (up)	۰/۳۵۴۷۲۰	۰/۳۵۴۷	۰/۱۳۵۱۰۴	۰/۱۳۵۲
۵۲۰	۰/۳۰۱۱۸۹	۰/۳۰۱۲	۰/۱۱۹۳۲۳	۰/۱۱۹۳
۷۵۰ (low)	۰/۲۰۴۱۳۴	۰/۲۰۴۱	۰/۰۷۱۱۲۰	۰/۰۷۱۱
۱۱۵۰ (low)	۰/۱۵۸۹۴۵	۰/۱۵۹	۰/۰۴۹۳۸۶	۰/۰۴۹۵
۱۸۰۰ (low)	۰/۱۲۷۶۰۴	۰/۱۲۷۶	۰/۰۳۵۵۲۷	۰/۰۳۵۵

همچنین تاریخچه همگرایی کد عددی حل کننده معادله اور-سامرفلد برای یک حالت خاص با عدد رینولدز ۱۳۵۰ و  $\alpha_i = -0.005$  در جدول ۲ آورده شده است. حدسهای اولیه در این حالت از مقادیر  $\alpha_r$  و  $\omega_r$  مربوط به حالت پایداری خنثی در نظر گرفته شده اند. در صورتیکه حدس اولیه برای این پارامترها از روابط (۳۸) تعیین گردد، روند همگرایی سرعت بیشتری پیدا خواهد کرد.

**جدول ۲- تاریخچه همگرایی کد حل کننده معادله اور-سامرفلد برای جریان بر روی صفحه تخت با  $\alpha_i = -0.005$ ,  $Re=1350$**

Iterations	$\alpha_r$	$\omega_r$
•(initial guess)	۰/۱۴۶	۰/۰۴۴
۱	۰/۱۶۸۳۵۰۷۸۳	۰/۰۴۹۲۴۴۸۵۷
۲	۰/۱۷۷۴۴۸۲۲۵	۰/۰۵۲۸۸۰۳۰۳
۴	۰/۱۸۵۹۳۳۸۰۳	۰/۰۵۳۹۲۱۱۷۱
۶	۰/۱۸۶۱۱۹۳۳۰	۰/۰۵۳۵۹۹۳۰۱
۸	۰/۱۸۶۱۲۰۵۶۴	۰/۰۵۳۵۹۶۷۴۰
۱۰	۰/۱۸۶۱۲۱۴۸۹	۰/۰۵۳۵۹۵۳۳۴
۱۲	۰/۱۸۶۱۲۱۴۰۷	۰/۰۵۳۵۹۵۷۶۴
۱۴	۰/۱۸۶۱۲۱۴۶۴	۰/۰۵۳۵۹۵۷۲۲
Jordinson[5]	۰/۱۸۶۱	۰/۰۵۳۶

### جریان عبوری حول یک ایرفویل

در این بخش نتایج مربوط به حل معادله اور-سامرفلد و تعیین گذار برای جریان عبوری حول یک ایرفویل ارائه می گردد. همانگونه که گفته شد پروفیلهای سرعت مورد نیاز برای حل معادله اور-سامرفلد از حل جریان آرام توسط کد عددی TVD بدست می آیند. در واقع

$$\text{Ln} \left\{ \frac{|\psi|_{tr}}{|\psi|_{ne}} \right\} = \int_{x_{ne}}^x -\alpha_i dx \quad (42)$$

که با توجه به رابطه (۳۹)، جمله سمت چپ در معادله فوق همان توان N است. پس می توان نوشت:

$$N = \int_{s_{ne}}^s -\alpha_i(\omega) ds \quad (43)$$

باید توجه داشت که تبدیل متغیر X به S به این دلیل است که در جریان حول ایرفویلها، مشخصه مکانی جریان فاصله هر نقطه روی سطح ایرفویل از لبه حمله، s، در نظر گرفته می شود. همچنین محاسبه N برحسب S را باید در در یک فرکانس ثابت انجام داد. پس از آن می بایست مقادیر N برحسب S در چندین فرکانس رسم شده و در آن نمودار یک بوش ماکزیمم (envelope) بر روی آن منحنیها رسم گردد که این بوش ماکزیمم در واقع مربوط به مقادیر بیشینه نرخهای تقویت ناپایداری هستند. محلی که در آن، مقدار N پیش فرض برای گذار، بوش ترسیم شده را قطع کند، محل نقطه گذار جریان می باشد [۴].

### ارائه و تحلیل نتایج

در این بخش به ارائه و تحلیل برخی نتایج بدست آمده پرداخته می شود. نتایج ارائه شده در دو بخش برای جریان بر روی یک صفحه تخت و جریان عبوری حول ایرفویل NACA 0012 می باشند.

### جریان بر روی یک صفحه تخت

به جهت ماهیت ساده جریان بر روی صفحه تخت و مشابه بودن پروفیلهای سرعت بلازیوس در طول جریان، ابتدا تحلیل پایداری برای این جریان به عنوان یک مورد آزمایشی (test case) انجام شد. پروفیلهای سرعت جریان با فرض برقراری لایه مرزی بلازیوس از (Blasius boundary layer) بر روی صفحه تخت و با استفاده از حلهای تشابهی تعیین شده اند. پروفیل سرعت جریان به همراه مشتقات اول و دوم آن در شکل ۴ آورده شده اند. شایان ذکر است که معادله بدست آمده در حلهای تشابهی، معادله بلازیوس است که به همراه شرایط مرزی آن در زیر مشاهده می گردند:

$$\begin{aligned} 2f''' + ff'' &= 0 \\ f &= f' = 0 \text{ at } \eta = 0 \\ f' &= 1 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (44)$$

منحنی های پایداری بدست آمده از تحلیل پایداری مکانی لایه مرزی بلازیوس برای کمیتهای عدد موج  $\alpha_r$  و فرکانس اغتشاشی  $\omega_r$  به ازای چندین مقدار  $\alpha_i$  در شکلهای ۵ و ۶ آورده شده اند. حل معادله اور-سامرفلد و تعیین مقادیر ویژه آن نشان می دهد که یک دامنه محدود برای عدد رینولدز به نام ناحیه ناپایدار وجود دارد که درون آن، اغتشاشات کوچک تقویت می شوند و منجر به ناپایداری جریان می گردند. در مقابل این ناحیه، ناحیه پایدار قرار دارد که در آن اغتشاشات میرا شده و از بین خواهند رفت. مرز این دو ناحیه نیز به نام «منحنی پایداری خنثی» نامیده می شود (منحنی وسط در شکلهای ۵ و ۶ با  $\alpha_i = 0$ ). همانطور که در شکلهای ۵ و ۶ دیده می شود کمترین عدد رینولدزی که روی منحنی پایداری خنثی قرار می

تقویت ناپایداری مکانی « $\alpha_i$ » نسبت به عدد رینولدز را در چند فرکانس فیزیکی ثابت نشان می دهد.

همچنین با استفاده از روش  $e^N$  نقطه گذار روی ایرفویل تعیین شد. همان گونه که گفته شد در این روش می بایست مقادیر  $N$  برحسب  $S$  در چندین فرکانس رسم شده و در آن نمودار یک بوش ماکزیمم بر روی آن منحنیها رسم گردد و محلی که در آن، مقدار  $N$  پیش فرض برای گذار، بوش ترسیم شده را قطع کند، محل نقطه گذار جریان می باشد. مقدار  $N$  از داده های تجربی تعیین می شود و برای هر نوع جریان دارای یک مقدار خاص است. برای جریان حول ایرفویلهای دوبعدی معمولا مقدار  $N=9$  منظور میگردد [۱۴]. در شکل ۱۳ تعیین گذار برای جریان حول ایرفویل NACA 0012 انجام شده است که همانطور که در شکل هم مشخص شده است محل گذار در  $s_{tr}=0.462$  می باشد که متناظر با  $x_{tr}=0.436$  است. برای ارزیابی کد  $e^N$  نتایج حاصل از آن با نتایج تجربی مرجع [۱۵] مقایسه شده است. این مقایسه که در جدول ۳ آورده شده است، حاکی از موفقیت این کد در تعیین گذار برای جریان حول ایرفویلهای می باشد.

جدول ۳- نتایج کد  $e^N$  در تعیین نقطه گذار برای جریان حول ایرفویل NACA 0012 در  $Re=2.88 \times 10^6$  و مقایسه با مقادیر تجربی [۱۵]

AOA	$x_{tr}(\text{upper\_surface})$		$x_{tr}(\text{lower\_surface})$	
	$e^N$ Code	exp[15]	$e^N$ Code	exp[15]
۰	۰/۴۳۶	۰/۴۵	۰/۴۳۶	۰/۴۵
۱	۰/۳۶۲	۰/۳۷	۰/۵۵۰	۰/۵۶
۲	۰/۲۷۴	۰/۲۹	۰/۶۰۸	۰/۶۲
۳	۰/۱۸۱	۰/۱۹	۰/۶۵۳	۰/۶۶
۴	۰/۱۲۶	۰/۱۲	۰/۷۰۱	۰/۷۰
۵	۰/۰۹۱	۰/۰۷۶	۰/۷۳۴	۰/۷۴
۶	۰/۰۶۴	۰/۰۵۱	۰/۸۰۲	۰/۸۲
۷	۰/۰۴۹	۰/۰۳۶	۰/۸۷۷	۰/۸۹

نکته مهمی که در مورد روش  $e^N$  باید به آن اشاره کرد این است که روش مزبور مکانیزم غیرخطی رشد اغتشاشات در فرآیند گذار را پیش بینی نمی کند، بلکه نقطه ای را که در آن اغتشاشات جریان به حد کافی رشد کرده اند و توانایی تبدیل رژیم جریان به رژیم کاملا مغشوش را دارند، تعیین می نماید. در واقع این روش فقط ناپایداریهای را مدل می کند که رفتار خطی داشته باشند زیرا اساس این روش بر مبنای معادله اور-سامرفلد استوار است. معادله اور-سامرفلد نیز با فرض تئوری پایداری خطی برای تحلیل رفتار موجهای دو بعدی تولمین-شلیختینگ بوجود آمده است. گسترش این امواج در واقع اولین مرحله یا اولین مود ناپایداری جریان است. اما آنچه باعث می گردد نتایج روش  $e^N$  در تعیین گذار همخوانی مناسبی با نتایج تجربی داشته باشد به دو موضوع مربوط می شود. یکی اینکه قسمت خطی رشد اغتشاشات در فرآیند گذار و در ناحیه مابین نقطه پایداری خنثی و نقطه گذار، سهم زیادی از این منطقه را به خود اختصاص داده است. این موضوع توسط ابرمسکی (Obremski) و همکارانش بررسی شده است که آنها حدود ۷۵ تا ۸۵ درصد این

حل جریان توسط این کد بدین صورت است که ابتدا با فرض آرام بودن جریان در همه نواحی حول ایرفویل، معادلات ناویر-استوکس حل می شوند و پروفیلهای مورد نیاز در تمامی مقاطع جریان تعیین می گردند. سپس تحلیل پایداری جریان با استفاده از حل معادله اور-سامرفلد انجام می شود. در مرحله بعد با استفاده از توابع ویژه و مقادیر ویژه بدست آمده از حل معادله اور-سامرفلد، محل دقیق نقطه گذار جریان به کمک روش  $e^N$  تعیین می گردد. پس از تعیین نقطه گذار، این بار می توان حل دقیق جریان را به طور مستقل در نواحی آرام و مغشوش انجام می شود. بدین گونه که از لبه حمله ایرفویل تا نقطه گذار فرض جریان آرام و از نقطه گذار تا لبه فرار، فرض جریان مغشوش صورت می پذیرد.

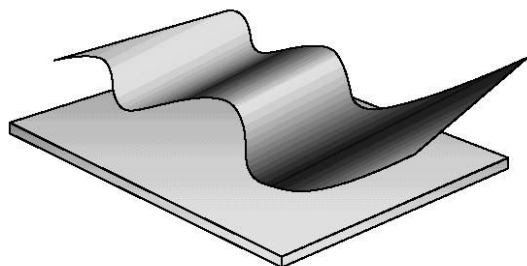
نتایجی که در این بخش ارائه می شوند عموما مربوط به جریان حول ایرفویل NACA 0012 می باشند که شبکه بندی انجام شده حول آن در شکل ۳ مشاهده می شود. تاریخچه همگرایی کد حل کننده جریان برای کمیت ضریب دراگ در شکل ۷ به همراه مقدار آن کمیت از حلهای تجربی [۱۵] آورده شده است. در این حالت حل شده از جریان مقدار پارامترهای عدد رینولدز، عدد ماخ و زاویه حمله، به ترتیب برابر  $Re=2.88 \times 10^6$ ،  $Ma=0.12$  و  $AOA=0^\circ$  می باشند که انتخاب عدد ماخ ۰/۱۲ به دلیل فراهم آوردن شرایطی برای مقایسه نتایج با جریانهای تراکم ناپذیر است.

در شکل ۸ بردارهای سرعت در پنج مقطع جریان بر روی سطح بالای ایرفویل نمایش داده شده اند. هدف از ارائه این شکل مشاهده چگونگی انتخاب پروفیلهای سرعت در هر مقطع جریان می باشد. در واقع در هر مقطع جریان می بایست پروفیلهایی را به عنوان ورودی کد حل کننده معادله اور-سامرفلد استخراج کرد که بردارهای سرعت مربوط به آنها بر سطح ایرفویل در آن مقطع مماس باشند. این بردارهای سرعت با  $U$  نشان داده می شوند.

در شکلهای ۹ و ۱۰ پروفیلهای سرعت در دو مقطع 0.253C و 0.698C با همان مقادیر عدد رینولدز، عدد ماخ و زاویه حمله یاد شده نشان داده شده اند. مقایسه پروفیلهای سرعت کد حاضر با پروفیلهای سرعت حاصل از نتایج تجربی مرجع [۱۶] بر روی این دو شکل انجام شده است. باید دانست که بدست آوردن این پروفیلها پس از تعیین نتایج گذار جریان و حل همزمان جریان در دو ناحیه آرام و مغشوش صورت گرفته است. تطابق خوب بین نتایج این تحقیق و نتایج تجربی از این دو شکل مشاهده می گردد. اما نکته مهمی که باید به آن اشاره کرد این است که پروفیلهای سرعتی که به عنوان ورودی به کد عددی حل کننده معادله اور-سامرفلد داده می شوند نباید دارای هیچگونه اختلال یا بی نظمی (irregularity) باشند. زیرا در این صورت باعث پیش بینی زودهنگام گذار جریان می گردند. برای مرتفع کردن این مشکل از هموار کردن (smooth) پروفیلهای سرعت استفاده شد [۱۷]. نمونه ای از این کار را در شکل ۱۱ می توان مشاهده کرد.

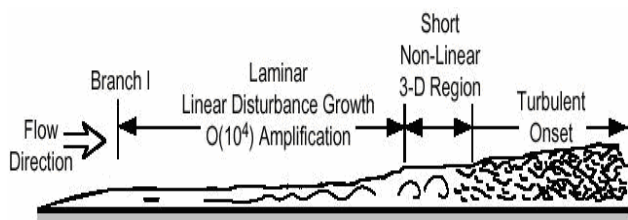
با توجه به ملاحظات ذکر شده، در نهایت تحلیل پایداری و تعیین نقطه گذار برای جریان عبوری حول ایرفویل NACA 0012 در چندین زاویه حمله انجام شد. شکل ۱۲ تغییرات مقادیر نرخ

- [13]. Sedaghat A., A Finite Volume TVD Approach to Transonic Flow Computation. PHD Thesis, The University of Manchester, 1997.
- [14]. Stock H.W., Airfoil Validation Using Coupled Navier–Stokes and  $e^N$  Transition Prediction Methods. Journal of Aircraft, v. 39, no. 1, 2002.
- [15]. Gregory N., and O'Reilly C.L., Low-Speed Aerodynamic Characteristics of NACA0012 Airfoil Section, Including the Effects of Upper-Surface Roughness Simulating Hoar Frost. TR, NPL Aero Rept. 1308, Middlesex, England, UK, 1970.
- [16]. Holst T.L., Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of Results. Journal of Aircraft, v. 25, no. 12, 1988.
- [17]. Wesner A., Schetz J., Holmberg D., and Malik M., Transition Predictions and Experiments in a Turbine Cascade. 33rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA paper 97-3011, 1997.
- [18]. Van Ingen J.L., The  $e^N$  method for transition prediction, Historical review of work at TU Delft. 38th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, 2008.

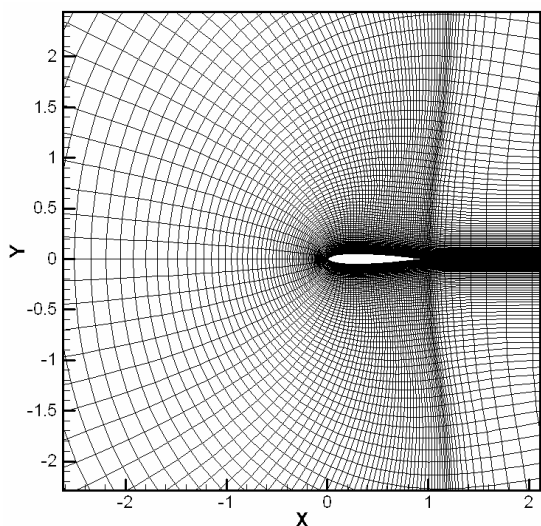


Sketch of Tollmien-Schlichting traveling wave.

شکل ۱- شماتیک امواج T-S



شکل ۲- شماتیک مراحل فرآیند گذار در محیط های کم اغتشاش



شکل ۳- نمایی از شبکه بندی ۱۴۱×۱۰۱ حول ایرفویل NACA 0012

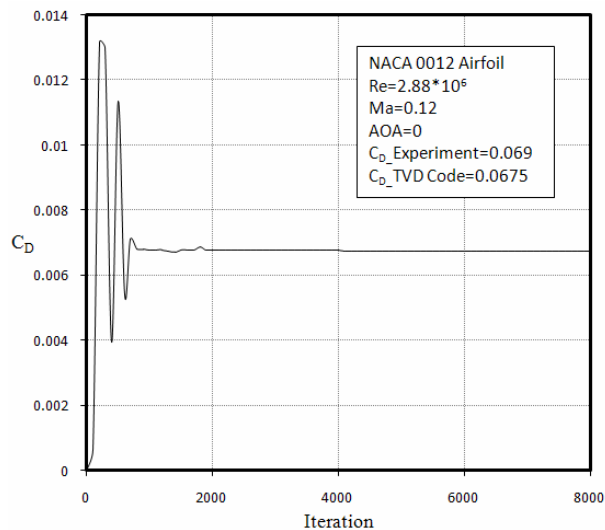
ناحیه را در تسخیر امواج با رفتار خطی محاسبه کرده اند. موضوع دیگری که در موفقیت روش  $e^N$  نقش انکار ناپذیری دارد این است که توان  $N$  مورد استفاده در این روش از نتایج بررسیهای تجربی جریانهای مشابه استخراج می گردد و بهمین خاطر همبستگی بسیار خوبی با داده های تجربی دارد [۱۸].

### نتیجه گیری و جمع بندی

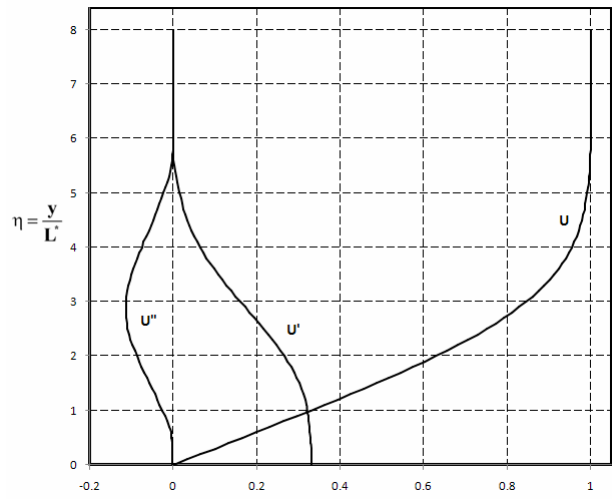
تحلیل پایداری هیدرودینامیکی برای جریان عبوری حول یک ایرفویل به کمک حل معادله اور-سامرفلد انجام شده است. سپس با استفاده از روش  $e^N$  محل دقیق نقطه گذار جریان تعیین شده است. پیش از آن نیز تحلیل پایداری جریان بر روی یک صفحه تخت به عنوان مورد آزمایشی صورت گرفت که از مقایسه نتایج آن با نتایج مرجع [۵] می توان از صحت کارکرد کدهای کامپیوتری نوشته شده اطمینان حاصل کرد. همچنین تطابق خوب بین نتایج روش  $e^N$  و نتایج کارهای تجربی [۱۵]، این روش را به عنوان روشی قابل اطمینان در تعیین گذار برای جریان حول ایرفویلها معرفی می کند.

### مراجع

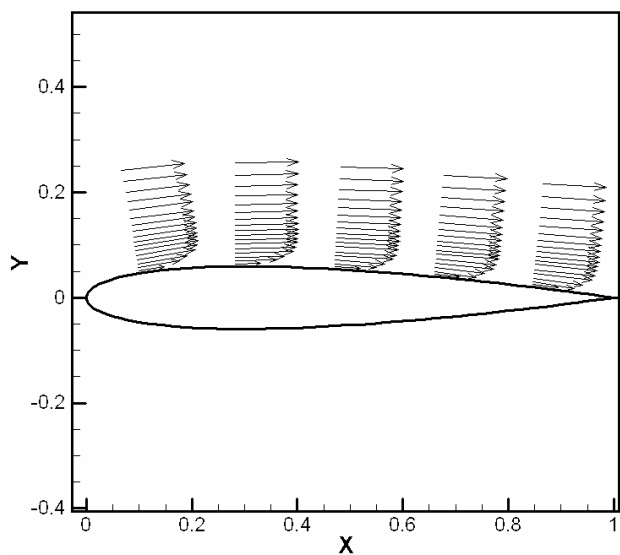
- [1]. Lian Y., and Shyy W., Laminar-Turbulent Transition of A Low Reynolds Number Rigid or Flexible Airfoil. AIAA Journal v. 45, no. 7, 2007.
- [2]. Drazin P.G., and Reid W.H., Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, 1981.
- [3]. White F.M., Viscous Fluid Flow. McGraw Hill press, 1991.
- [4]. Cebeci T., Shao J.P., Kafyeke F., and Laurendeau E., Computational Fluid Dynamics for Engineers. Horizons Publishing, California, 2005.
- [5]. Jordinson R., The Flat Plate Boundary Layer, Part1: Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation. Journal of Fluid Mechanics, v. 43, 1970, pp. 801-811.
- [6]. Van Stijn Th.L., and Van De Vooren A.I., An Accurate method for solving the Orr-Sommerfeld equation. Journal of Engineering Mathematics, v. 14, no. 1, 1980.
- [7]. Orszag S.A., Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. Journal of Fluid Mechanics, v. 50, 1971, pp. 689-703.
- [8]. Danabasoglu G., and Biringen S., A Chebyshev Matrix Method for Spatial Modes of the Orr-Sommerfeld Equation. NASA Contractor Report 4247, 1989.
- [9]. Ng B.S., and Reid, W.H., On the Numerical Solution of the Orr-Sommerfeld Problem: Asymptotic Initial Conditions for Shooting Methods. Journal of Computational Physics, v. 38, 1980, pp. 275-293.
- [10]. Marusic I., Tang B., Rumchik C., and Chinniah R., Stability Analysis of a Cylinder Wake. University of Minnesota, Pub. AEM 8211, spring 2001.
- [11]. Shao J.P., The Boeing Company, Huntington Beach, Private Communication. July 2008.
- [12]. Stock H.W., and Haase W., Feasibility Study of  $e^N$  Transition Prediction in Navier–Stokes Methods for Airfoils. AIAA Journal, v. 37, no. 10, 1999.



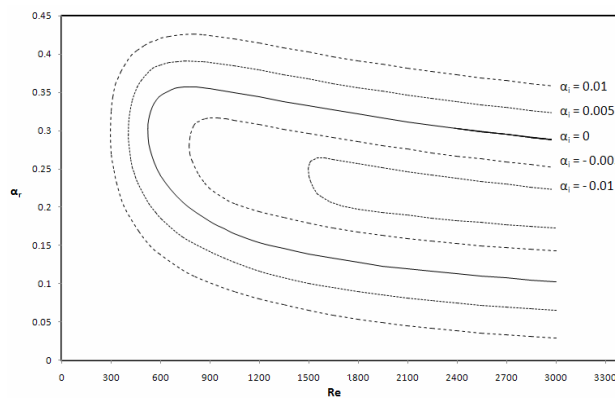
شکل ۷- تاریخچه همگرایی کد حل کننده جریان برای کمیت ضریب درآگ



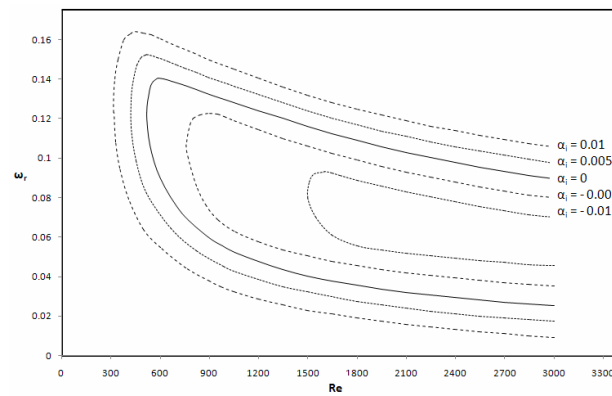
شکل ۴- پروفیل سرعت بلازیوس به همراه مشتقات اول و دوم آن



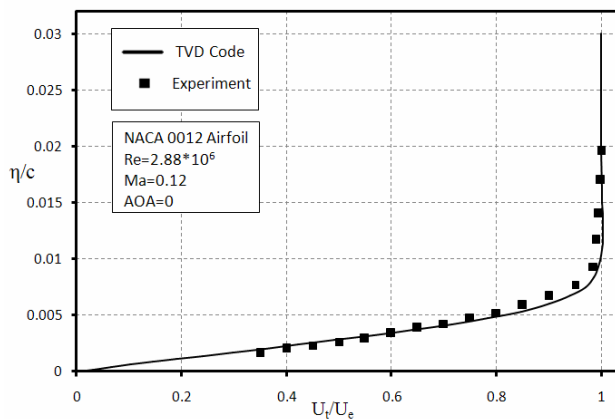
شکل ۸- بردارهای سرعت  $U_1$  در پنج مقطع جریان بر روی سطح بالای ایرفویل



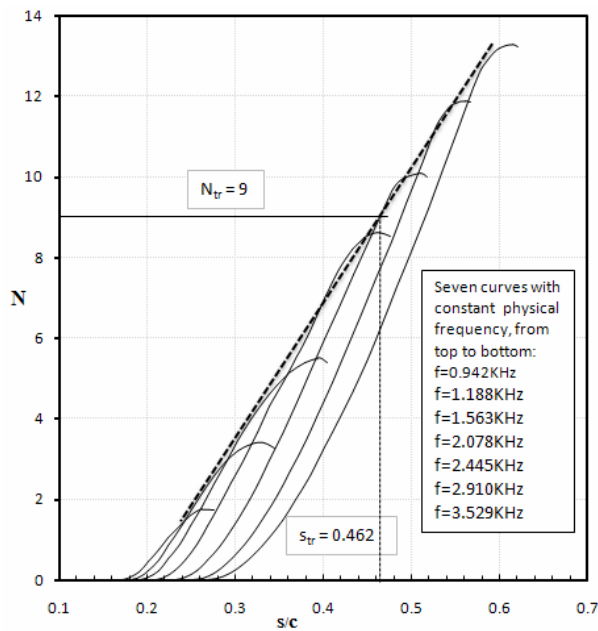
شکل ۵- تحلیل پایداری جریان بر روی صفحه تخت (منحنی های عدد موج)



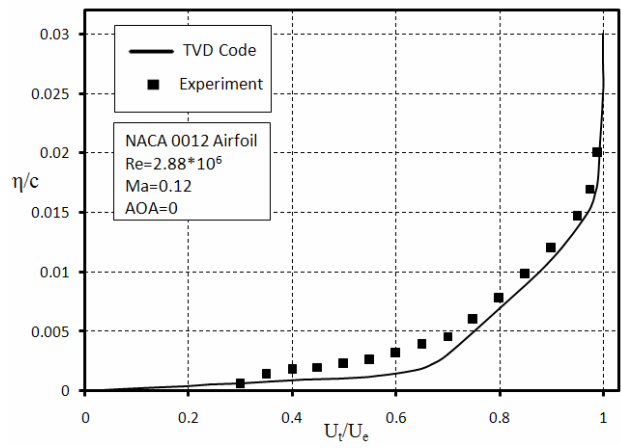
شکل ۶- تحلیل پایداری جریان بر روی صفحه تخت (منحنی های فرکانس اغتشاشی)



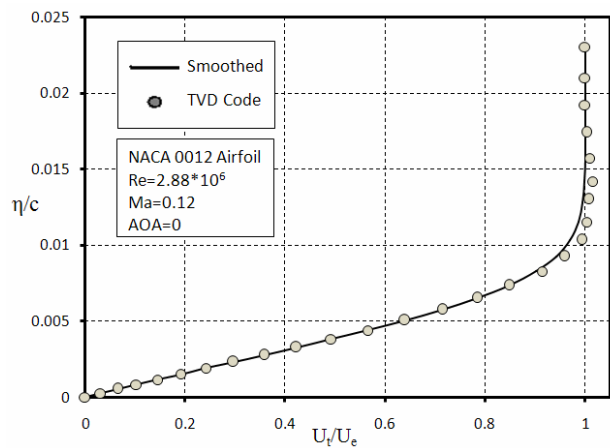
شکل ۹- پروفیل سرعت آرام در مقطع  $x/c = 0.253$  و مقایسه با نتایج تجربی مرجع [۱۶]



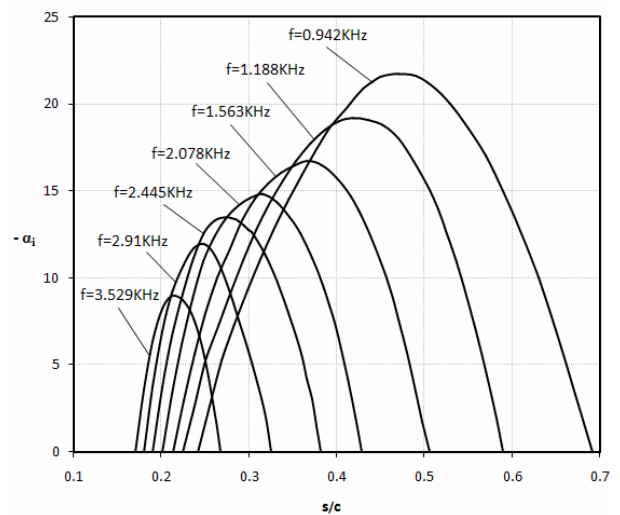
شکل ۱۳- تعیین نقطه گذار برای جریان حول ایرفویل NACA 0012 در  $Re=2.88 \times 10^6$ ,  $Ma=0.12$  و  $AOA=0^\circ$  با استفاده از روش  $e^N$



شکل ۱۰- پروفیل سرعت مغشوش در مقطع  $x/c = 0.698$  و مقایسه با نتایج تجربی مرجع [۱۶]



شکل ۱۱- هموار کردن (smooth) پروفیل سرعت جریان آرام در مقطع  $(x/c = 0.3)$



شکل ۱۲- تحلیل پایداری جریان حول ایرفویل NACA 0012 (منحنی های نرخ تقویت ناپایداری مکانی « $-\alpha_i$ »)