



## بررسی نوسانات بال با سازه‌ی دو خطی

سمیه یعقوبی کوپایی<sup>1</sup>، احمد صداقت<sup>2</sup>

1- دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، خیابان دانشگاه صنعتی

2- دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

### چکیده

علوم و صنایع هوایی و فضایی امروزه به‌عنوان یکی از شاخص‌های ارزیابی سطح علمی و فنی کشورها مطرح می‌باشد و از نظر ایمنی هم در سرنوشت کشورها نقش مهمی را ایفا می‌کند. بنابراین تلاش برای ارتقاء توانایی صنعتی در این زمینه از سوی کشورهای مختلف کاملاً توصیه می‌شود. یکی از موارد مهمی که می‌بایست در طراحی سازه‌های هوایی به خصوص بال هواپیما مد نظر قرار گیرد، ناپایداری‌های ناشی از پدیده‌های آئروالاستیک است. ارتعاشات بال می‌تواند ناپایدار شده و در حالت بحرانی، فلاتر سبب شکست سازه شود. بنابراین شناخت حالات بحرانی و عوامل تأثیرگذار روی آن‌ها بسیار حائز اهمیت است و در طراحی سازه باید در نظر گرفته شود. در این مقاله یک بال با دو درجه‌ی آزادی به نام هانکوک و با سازه‌ی غیر خطی یا دو خطی ناپیوسته<sup>3</sup> مدل شده و به کمک برنامه‌ای به زبان متلب (MATLAB) رفتار آئروالاستیک بال بررسی شده است. اثرات غیرخطی نظیر نوسانات با دامنه‌ی محدود (LCO) در سرعت‌های بالاتر از سرعت فلاترخطی قابل مشاهده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: فلاتر، سختی دو خطی ناپیوسته، نوسانات با دامنه‌ی محدود

### مقدمه

با شروع قرن حاضر علوم هوایی وارد دومین قرن از عمر خود می‌شوند. علوم فضایی نیز تقریباً 50 سال اول خود را پشت سر می‌گذارند. با این وجود پیشرفت‌هایی که در همین مدت کوتاه نصیب بشر شده، چشمگیر و خیره‌کننده است. علوم هوایی و فضایی یکی از شاخص‌های ارزیابی سطح علمی و فنی کشورهاست و تلاش برای ارتقاء سطح توانایی‌های صنعتی در این زمینه از سوی بسیاری از کشورها در حال انجام است. کشور ما ایران اگرچه برای رسیدن به سطح جهانی در این زمینه راه دشواری در پیش‌رو دارد، اما می‌توان با استفاده از تجربیات کشورهای دیگری که این مسیر را پیموده‌اند، از سختی راه کاست.

پدیده‌ی آئروالاستیک یکی از مباحث مهمی است که باید در طراحی سازه‌های هوایی مدنظر قرار گیرد. به‌طور کلی می‌توان گفت آئروالاستیسیته علمی است که به برهم‌کنش اجسام الاستیک و هوا می‌پردازد [1]. به‌عبارت دیگر در این مبحث، تأثیرات جریان هوا روی سازه‌ی جسم الاستیک و برعکس همانند یک بال هواپیما، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مهمترین تأثیرات جریان هوا روی سازه‌ی هواپیما، به دو قسمت ناپایداری استاتیکی (واگرایی) و ناپایداری دینامیکی (فلاتر) مربوط می‌شود. تأکید اصلی این مقاله بر روی ناپایداری دینامیکی است که فلاتر نامیده می‌شود.

معمولی‌ترین و رایج‌ترین مسائل در آئروالاستیک، مشکلات مربوط به پایداری است. اگرچه مدول الاستیسیته‌ی یک سازه‌ی داده‌شده از سرعت هواپیما مستقل است، نیروهای آئرو دینامیک قویاً به آن وابسته است. وقتی این اتفاق به نحوی روی دهد که نیروهای اینرسی تأثیر کمیداشته- باشند، به آن ناپایداری آئروالاستیک استاتیکی یا واگرایی اطلاق می‌شود. در مقابل، وقتی که نیروهای اینرسی با اهمیت باشند، ناپایداری دینامیکی حاصل، فلاتر گفته می‌شود.

از لحاظ ریاضی پاسخ آئروالاستیک خطی و مسائل پایداری مکمل یکدیگرند. این‌ها ناپایداری‌هایی هستند که به وسیله‌ی امتحان کردن شرایطی که تحت آن، معادلات همگن دارای جواب‌های غیر جزئی هستند، قابل پیش‌بینی است، اگرچه که پاسخ مسائل عموماً براساس حل معادلات غیرهمگن است.

وقتی سیستم به سمت ناپایداری می‌رود، پاسخ به معادلات غیرهمگن، دیگر وجود نخواهد داشت. این درحالی است که قسمت همگن معادلات به‌حالت پایدار مربوط است و پاسخ غیر جزئی ندارد. پیش‌بینی‌ها از آنالیز خطی می‌تواند مختلف باشد. در هواپیماهای واقعی، این امکان وجود دارد که نوسان‌هایی شروع به گسترش کند که خودبه‌خود تقویت شده و به سمت واگرایی می‌روند. این اتفاق حتی در سرعت‌های زیر سرعت فلاتر هم می‌تواند رخ دهد. به‌علاوه، اغتشاشات بزرگ می‌تواند به یک سیستم ضربه وارد کند (آتراپرت کرز) که این با تحلیل‌های خطی، به‌صورت پایدار با دامنه‌های نوسانی بلند پیش‌بینی می‌شود. هر دو موقعیت می‌تواند منجر به نوسان‌های پرودییک پایا شود که به این حالت نوسان‌های با سیکل محدود یا<sup>4</sup> LCO گفته می‌شود. در این مواقع مسائل مربوط به خستگی هم پیش می‌آید. این مسائل ممکن است

<sup>1</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، [s.vaghubi@me.iut.ac.ir](mailto:s.vaghubi@me.iut.ac.ir)

<sup>2</sup> استادیار، [sedaghat@cc.iut.ac.ir](mailto:sedaghat@cc.iut.ac.ir)

<sup>3</sup> Bilinear

<sup>4</sup> Limit Cycle Oscillation

منجر به نگرانی‌هایی در مورد عمر برخی از قطعات خاص هواپیما شود. برای اینکه بتوانیم این‌گونه رفتارها را تحلیل کنیم، هواپیما باید به‌عنوان یک سیستم غیرخطی در نظر گرفته شود [1].

تأثیر عوامل غیرخطی در هواپیماهای مدرن و در ابزار مورد نیاز برای پیش‌بینی اثرات غیرخطی اهمیتی رو به افزایش دارد، که این عوامل غیرخطی می‌تواند عوامل غیرخطی سازه‌ای (مانند بازی آزاد، هیسترتیک، مکعب سختی)، عوامل غیرخطی آیرودینامیکی (اثرات ترانسونیک) و یا پدیده‌های کنترلی (تاخیر زمانی، قانون‌های کنترلی) باشد. مدل‌های آیرودینامیکی و سازه‌ای خطی قادر به توضیح یا پیش‌گویی پدیده‌ی نوسان‌های سیکلی محدود LCO نمی‌باشند. نوع رایج از غیرخطی‌های سازه‌ای، سختی دو خطی<sup>۵</sup> است. این گونه غیرخطی‌ها وقتی اتفاق می‌افتد که سیستم‌های کنترل و سیستم‌های اتصال فتری<sup>۶</sup> در معرض بار اولیه قرار بگیرد [7 تا 13].

تکنیک‌های متفاوتی در جهت ایجاد ترسیم دینامیکی از سیستم‌های آیروالاستیک گسترش داده شده‌است. انتگرال‌های عددی همانند روش رانگ کوتا، پایه‌های حل عددی رفتار سیستم‌های غیرخطی است. این روش‌ها که پاسخ با شرایط اولیه معلوم در حالت‌های گذرا و پایا هر دو را پوشش می‌دهد در سرعت فلاتر خطی دقیق نیستند و همین‌طور با ساده سازی مدل‌های آیرودینامیک به کار می‌روند. تلاش‌های گسترده در همین راستا در حال انجام است که حل کننده‌های کوپل‌شده را گسترش دهد و از این طریق قادر به حل مدل‌های آیرودینامیکی پیچیده‌تری شود، نظیر حل کامل معادلات ناویر استوکس. این روش‌ها هزینه‌های محاسباتی را به‌میزان قابل توجهی افزایش می‌دهند.

به منظور بر طرف نمودن مشکلات روش‌های انتگرالی نظیر روش رانگ کوتا و کاهش بار محاسباتی و افزایش بازده در انتگرال عددی، تکنیک مدل دمپینگ پیشنهاد شده‌است. همچنین، روش تعادل هارمونیک<sup>۷</sup> به‌طور گسترده برای پیش‌بینی LCO بکار گرفته شد. این روش به‌وسیله کریلوف و بوگولیوبوف معرفی شد و برای مقایسه منطقی با نتایج انتگرال‌های عددی از آن استفاده شد.

این موضوع قابل بحث است که چنین تشابه‌سازی‌هایی نمی‌توانند برای پیش‌بینی‌ها تا اندازه‌ی زیادی درست باشند؛ و یک سری از موقعیت‌های آزمایش بایستی در نظر گرفته‌شوند که شرایط بحرانی قابل دستیابی شود و همیشه این امکان هست که از سرعت بحرانی تجاوز کند و یا اصلاً این سرعت قابل دستیابی نباشد. تقاضای کاهش مرکز منیفلد به منظور کاهش معادلات سیستم به کمترین تعداد ممکن پیشنهاد شده‌است. یک فرض بزرگ در تئوری فرم نرمال این است که غیرخطی‌ها پیوسته فرض شده‌اند و کار قبلی بعنوان سیستم آیروالاستیک معمولاً رفتارهایی را نشان می‌دهند که ناشی از غیرخطی‌های ناپیوسته است که آنها قابل توصیف با توابع تحلیلی نمی‌باشد. نظیر بازی آزاد، سختی دو خطی، هیسترتیک. مرحله کلیدی حدس یک تابع غیرخطی ناپیوسته با استفاده از یک چند جمله‌ای ساده است. یک روش جایگزینی منحنی مناسب (curve

fitting) به منظور معلوم کردن ضرایب چند جمله‌ای بکار گرفته شده‌است. روش ارائه‌شده روی تعدادی از سیستم‌های آیروالاستیک با سختی دوخطی بکار گرفته و تأیید شده‌است. [7 تا 13].

## فلاتر، غیرخطی‌ها و راهکارهایی برای یافتن سرعت و فرکانس فلاتر

فلاتر وقتی اتفاق می‌افتد که عضوی از یک هواپیما (مثل بال، سطح کنترل یا دم هواپیما) دچار نوسان‌های واگرا شود. سرعتی که در آن، این اتفاق می‌افتد، به‌عنوان سرعت فلاتر شناخته شده‌است. در سرعت‌های زیر سرعت فلاتر هرگونه ارتعاشات سازه‌ای دینامیکی اولیه میرا خواهد شد. در سرعت‌های بالاتر از سرعت فلاتر این‌گونه اغتشاشات سازه‌ای دینامیکی، رشد خواهد کرد و اگر به کمک غیرخطی‌های سازه‌ای یا آیرودینامیکی محدود نشود منجر به شکست سازه می‌شود. بنابراین ضروری است که همه‌ی هواپیماها به گونه‌ای طراحی شوند که فلاتر اتفاق نیفتد.

راهکاری جدید معرفی شده‌است که به کمک آن سرعت و فرکانس مربوط به فلاتر سیستم‌های آیروالاستیک با 2 درجه آزادی (2DOF) یا بیشتر را می‌توان حساب کرد. یک شکل از این روش استفاده از برنامه‌نویسی سمبلیک برای انجام کلیه محاسبات است. مقادیر خواسته‌شده و مطلوب می‌تواند بدون نیاز به محاسبات مکرر برای مقادیر ویژه در سرعت‌های مختلف، معلوم شود. این روش از مدل هانکوک با 2 درجه آزادی، با آیرودینامیک ثابت یا متغیر (وابسته به فرکانس) و غیر پایا استفاده می‌کند و بدین وسیله معتبر است. تئوری‌های کلاسیک برای مدل کردن رفتار آیروالاستیک هواپیما، آیرودینامیک خطی و سازه‌های خطی را فرض می‌کنند. با این وجود اهمیت تأثیر عوامل غیرخطی در هواپیماهای مدرن در حال افزایش است [2،3،4]. این عوامل غیرخطی می‌تواند بر پایه‌ی این موارد باشد:

- غیرخطی نوع ساختاری مثل «بازی آزاد»<sup>۸</sup>، بک‌لش<sup>۹</sup>، سختی از درجه سوم<sup>۱۰</sup>
- غیرخطی نوع آیرودینامیکی مثل دمپینگ از درجه‌ی دوم و شوکهای متحرک<sup>۱۱</sup>
- غیرخطی نوع کنترلی مثل تأخیرهای زمانی و قانون‌های کنترل غیرخطی

همچنین، این غیرخطی‌ها می‌توانند در عمل نوسان‌های با سیکل محدود (LCO) ایجاد کنند که این اتفاق در یک سیستم خطی نخواهد افتاد. با افزایش استفاده از تکنولوژی پیچیده و به همراه آن ساخت تکنیک‌هایی که مقدار دمپینگ ذاتی را کاهش می‌دهد، استفاده از تکنیک‌های آنالیز خطی برای تحلیل‌های آیروالاستیک کمتر امکان پذیر است. LCO چند سالی است که یک موضوع مهم شده‌است. اینکه مسئله‌ی نوسان‌های با سیکل محدود (LCO) یک مسئله‌ی خستگی است، یک مسئله‌ی نامطلوب است و به این دلیل

<sup>8</sup> Free Play

<sup>9</sup> Back Lash

<sup>10</sup> Cubic Stiffness

<sup>11</sup> Moving Shocks

<sup>5</sup> Bilinear Stiffness

<sup>6</sup> Spring tab systems

<sup>7</sup> Harmonic Balance Method

$\omega$ ، می‌باشند. چند جمله‌ای مشخصه‌ی منطبق بر سیستم (3) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \beta_1 \lambda^3 + \beta_2 \lambda^2 + \beta_3 \lambda + \beta_4$$

که در آن ضرایب چند جمله‌ای مشخصه  $\beta_i = \beta_i(\omega, V), i=1,2,3,4$  تابعی از سرعت هوا،  $V$ ، و فرکانس،  $\omega$ ، هستند.

## 2- پیشگویی فلاتر برای مدل هانکوک بال

یک بال صلب با وتر ثابت را در نظر بگیرید. (شکل 1) که در انتهایش لولا شده و دارای زاویه خمشی  $\gamma$  و زاویه پیچشی  $\theta$  است. معادلات حرکت برای مدل بال توسط معادله‌ی (1) داده شده‌است که  $q = (q_1, q_2) = (\gamma, \theta)$  بردار نشان‌دهنده برای مدل بال است. در مرجع [2 تا 6] داریم:

$$A = \begin{bmatrix} I_\gamma & I_{\gamma\theta} \\ I_{\gamma\theta} & I_\theta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{cs^2 a}{6} & 0 \\ -\frac{c^2 s^2 ea}{4} & -\frac{c^3 s}{2} M_\theta \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs^2 a}{4} \\ 0 & -\frac{c^2 sea}{2} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} k_\gamma & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

(4)

که در آن  $I_\gamma, I_\theta, I_{\gamma\theta}$  به ترتیب ممان اینرسی خمشی، پیچشی و حاصل ضرب آن‌هاست.

$k_\theta, k_\gamma$  سختی چرخشی به ترتیب در خمش و پیچش است. پارامترهای  $a, e, s, c$ ، به ترتیب نشان دهنده‌ی طول وتر، طول نصف دهانه‌ی بال، فاصله‌ی بدون محور الاستیک و مرکز آیرودینامیکی و مقطع دو بعدی شیب منحنی برآ می‌باشد. دمپینگ سازه‌ای،  $D$ ، در اینجا صرف نظر شده‌است، اگرچه که وجود یا عدم این پارامتر از کلیت مسئله نمی‌کاهد. استفاده از مدل هانکوک برای ماتریس معادله‌ی (3) این درایه‌ها را به همراه دارد:

$$a_1 = -\frac{h_\theta k_\gamma}{\omega_\theta^2},$$

$$a_2 = -\frac{\rho a c s}{12 \omega_\theta} (3 c e s h_{\gamma\theta} + 2 s^2 h_\theta) V,$$

$$a_3 = k h_{\gamma\theta} I_\theta - \frac{\rho a c s}{4 \omega_\theta^2} (s h_\theta + 2 c e h_{\gamma\theta}) V^2,$$

$$a_4 = -\frac{\rho s c^3 M_\theta}{2 \omega_\theta} h_{\gamma\theta} V,$$

$$b_1 = \frac{h_{\gamma\theta} k_\gamma}{\omega_\theta^2},$$

$$b_2 = \frac{\rho a c s}{12 \omega_\theta} (3 c e s h_\gamma + 2 s^2 h_{\gamma\theta}) V,$$

$$b_3 = -k h_\gamma I_\theta + \frac{\rho a c s}{4 \omega_\theta^2} (s h_{\gamma\theta} + 2 c e h_\gamma) V^2,$$

$$b_4 = \frac{\rho s c^3 M_\theta}{2 \omega_\theta} h_\gamma V.$$

(5)

است که فلاتر وقایع نامطلوب را به دنبال دارد و باید با تمام هزینه‌ی ممکن از وقوع آن جلوگیری شود [2 تا 6].

بعد از مقدمات گفته‌شده، تلاش بر این است که در این میحث، سرعت بحرانی فلاتر، با روشی ساده بدست‌آید. اساس این روش، معادله‌ی دیفرانسیل استاندارد زیر است:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = F(t)$$

این معادله‌ی دیفرانسیل، پاسخ سیستم در مقابل نیروی  $F(t)$  را می‌دهد. در این معادله  $m$ ، ضریب اینرسی یا جرم است،  $c$ ، ضریب میرایی است و  $k$ ، ضریب سختی فنر است. در ضمن، تمامی این ضرایب، ثابتند.

## محاسبات فلاتر

هدف از محاسبات فلاتر برای یک سیستم انعطاف پذیر، به دست آوردن شرایط بحرانی، و در نتیجه تعیین سرعت و فرکانس فلاتر، و اگر لازم باشد، تعیین مدول و فاز مربوط به روابط بین خمش و پیچش، می‌باشد. از آنجا که، فقط به دست آوردن شرایط بحرانی حرکت نوسانی مدنظر است، می‌توان از آیرودینامیک نوسانی استفاده کرد.

## مدل هانکوک بال با دو درجه‌ی آزادی

1- مشخصه‌های فلاتر برای یک سیستم آیروالاستیک با دو درجه‌ی آزادی

معادله‌ی حرکت برای یک سیستم آیروالاستیک کلی با دو درجه‌ی آزادی مطابق زیر توضیح داده‌می‌شود [2,3,7,15]:

$$A \ddot{q} + (\rho VB + D) \dot{q} + (\rho V^2 C + E) q = 0 \quad (1)$$

که در آن  $q = (q_1, q_2)$  برداری است که گویای مختصه‌های حرکت جسم (بال) است،  $\rho$  بیان‌کننده‌ی چگالی هوا و  $V$  سرعت هوا (بال) است. ماتریس‌های  $A, B, C, D, E$  به ترتیب بیان‌کننده‌ی ماتریس‌های جرم، دمپینگ آیرودینامیکی، دمپینگ سازه‌ای، سختی آیرودینامیکی و سختی سازه‌ای می‌باشند.

اگر از تکنیک فضای حالت استفاده کنیم، سیستم معادلات بالا را می‌توان از مرتبه‌ی اول به شکل زیر نوشت: (فرض کنید که هیچ‌گونه میرایی سازه‌ای  $D$  وجود نداشته‌باشد.)

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}(\rho V^2 C + E) & -A^{-1}(\rho VB) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2)$$

اگر معادله‌ی (2) را گسترش دهیم، سیستم زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن درایه‌های ماتریس  $a_i$  و  $b_i$ ها بر اساس مدل ریاضی استفاده شده تعریف شده‌اند که تابعی از سرعت هوا،  $V$ ، و فرکانس،

که در آن:

$$h_\gamma = \frac{I_\gamma}{I_\gamma I_\theta - I_{\gamma\theta}^2}, \quad h_\theta = \frac{I_\theta}{I_\gamma I_\theta - I_{\gamma\theta}^2}, \quad h_{\gamma\theta} = \frac{I_{\gamma\theta}}{I_\gamma I_\theta - I_{\gamma\theta}^2} \quad (6)$$

و پارامتر فرکانس  $\nu$ ، که به آن فرکانس کاهش یافته اطلاق می-شود، به شکل زیر تعریف شده است:

$$\nu = \frac{\omega c}{V} \quad (7)$$

در دینامیک جریان تراکم ناپذیر، جملات خاصی که شامل  $\nu^2$  هستند را می-توان در مشتقات نوسانی تشخیص داد. این جملات، مقادیر مجانبی نیروهای دینامیکی را هنگامی که  $\nu \rightarrow \infty$  به دست می-دهند (که همان  $\omega \rightarrow \infty$  یا  $V \rightarrow 0$  می-باشد)، زیرا نیروهای دینامیکی سیال، متناسب با  $\frac{1}{2}\rho V^2$  می-باشند، حاصلضرب جملات  $\frac{1}{2}\rho V^2$  و  $\nu^2$  هنگامی که  $V \rightarrow 0$  حد متناهی را به دست می-دهند، و بنابراین جملات جرم ظاهر شده، نیروهای دینامیکی سیال می-باشند، که روی پروفیل نوسانی در خط جریانی با سرعت صفر، اثر می-کنند. ظاهر شدن جملات جرم، ناشی از این حقیقت است که، در جریان تراکم ناپذیر، تغییرات، به صورت لحظه‌ای در میدان جریان منتقل می-شوند، یعنی سرعت صوت در جریان تراکم ناپذیر بی-نهایت است. اما در آئرویدینامیک، از آنجا که هوا، سیالی تراکم پذیر می-باشد، پخش شدن اغتشاشات در میدان جریان، نیاز به زمان دارد و آنی نیست.

بنابراین جملات شامل  $\nu^2$  در مشتقات، مشاهده نمی-شوند و جملات جرم، قابل تشخیص نیستند. جدول بندی مشتقات، کلیه نیروهای آئرویدینامیکی را نشان می-دهد. نیازی به تلاش برای یافتن جملات جرم ظاهری نیست، زیرا آنها هرچه هستند، خودی خود در محاسبات در نظر گرفته می-شوند. به عنوان مثال، هر گونه تلاشی برای یافتن جملات جرم ظاهری در آزمایش‌های تونل باد، کاملاً ساختگی و مصنوعی می-باشد.

3-مدل هانکوک بال در صورت وجود عوامل غیرخطی

معادلات حرکت برای مدل هانکوک بال با یک تابع غیرخطی به شکل زیر بازنویسی می-شود:

$$A\ddot{q} + (\rho VB + D)\dot{q} + (\rho V^2 C + E)q + F(q) = 0 \quad (8)$$

که در آن  $q = (q_1, q_2) = (\gamma, \theta)$  بردار نشان‌دهنده‌ی جهات حرکتی است.  $\rho$  بیان‌کننده‌ی چگالی هوا و  $V$  سرعت هوا (بال) می-باشد. ماتریس‌های  $E, C, D, B, A$  به ترتیب بیان‌کننده‌ی ماتریس‌های جرم، دمپینگ آیرودینامیکی، دمپینگ سازه‌ای، سختی آیرودینامیکی و سختی سازه‌ای هستند و در معادله‌ی (4) داده شده-اند. دمپینگ سازه‌ای،  $D$ ، در این بررسی صرف‌نظر شده است.

تابع غیرخطی  $F(q)$ ، در حالت کلی به شکل زیر تعریف شده است:

$$F(q) = (F(q_1) \quad F(q_2) \quad F(q_3) \quad F(q_4))^T \quad (9)$$

که هرگونه غیرخطی را می-توان در ضمن تابع  $F$  مدل کرد [2,3,7,15].

در این مطالعه مدل هانکوک را با دو درجه‌ی آزادی (خمشی و پیچشی) در نظر گرفته‌ایم، در شکل 2 این درجه‌ها نمایش داده شده-است.

4- مدل آیروالاستیکی هانکوک با شرایط غیرخطی ناپیوسته‌ی دوخطی

روش مورد نظر در این پروژه مدل هانکوک بال است (شکل 1) که بال مستطیلی صلبی است که در انتهایش لولا به فنرهایی شده که عامل حرکت پیچشی و خمشی‌اند. در این مدل، فنر پیچشی دارای یک سختی دو خطی است و به شکل معادله‌ی زیر بیان شده است:

$$k_{BL}(\theta) = \begin{cases} K'_\theta \theta & |\theta| < g, \\ gK'_\theta + (\theta - g)K_\theta & \theta > g, \\ -gK'_\theta + (\theta + g)K_\theta & \theta < -g. \end{cases} \quad (10)$$

در واقع در این نوع غیرخطی، یک سختی دو خطی که در مرکزش نرم‌تر است<sup>12</sup> فرض شده است (شکل 3). در معادله‌ی (10)  $g$  جابه-جایی تعریف شده است که از سختی داخلی  $k'_\theta$  تابعیت می-کند [15]

#### نتایج بدست آمده و تحلیل آنها

در این مقاله سعی بر این بوده است که با استفاده از برنامه‌نویسی با MATLAB و با تغییر شرایط بتوان به سرعتی که در آن LCO اتفاق می‌افتد (عدم همگرایی یا واگرایی در نمودار  $(\theta - t)$ ) دست یافت. به همین منظور با استفاده از این نرم‌افزار معادله‌ی غیرخطی (8) با وارد کردن معادله‌ی (10) در آن و همچنین، با استفاده از ثوابت زیر حل شده است [15].

$$s = 10, c = 3m, a = 2\pi, m = 200kg,$$

$$e = 0.25, \rho = 1.225kg/m^3, M_\delta = -0.1.$$

$$x_{cm} = 0.6c, y_{cm} = 0.6s, x_f = 0.5c,$$

$$I_\gamma = \frac{ms^2}{3}, I_\theta = mc^{4/3}x_{cm}^{2/3} + m(x_{cm} - x_f)^2$$

$$I = m(x_{cm} - x_f)0.45s,$$

$$k_\gamma = (4\pi)^2 I_\gamma, k_\theta = (20\pi)^2 mc^2 / 12$$

بعد از آن با تغییر سرعت، شرایط اولیه و  $k = k_{BL}(\theta)/\theta$  نتایج در بازه‌های مختلف زمانی مشاهده شد. اما چون در این پروژه منظور اصلی LCO می‌باشد، به همین نتایج بسنده شد.

در ادامه LCOهای بدست‌آمده برای سیستم‌های با شرایط ذکر شده، نشان داده می‌شود و در ضمن هر کدام از این شرایط در جای خود قید شده است. در همه‌ی نمودارهای  $(\theta' - \theta)$  تقارن حول موقعیت

## مراجع

1. Hodges, D.H. and Pierce, G.A., "Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity" Cambridge University Press, 2002.
2. G.A. Vio, and J. E. Cooper "Limit Cycle Oscillation prediction For Aeroelastic Systems With Discrete Bilinear Stiffness", Int. J. of Appl. Math. And Mech. Vol. 3(2005), 100-119, 2005.
3. Breitbach E. Effects of structural an-linearities on air craft vibration and testing. Report R-665, AGARD, 1978.
4. Dimitriadis G. Investigation of nonlinear aeroelastic systems. Ph.D. thesis, university of Manchester, 1999.
5. S.J. Price, H. Alighanbari, and B.H.K. Lee, The aeroelastic response of a two dimensional airfoil with bilinear and cubic structural non-linearities, Journal of Fluids and Structures, 9, 175-193, 1995.
6. M. Holden R. Brazeir, and A. Cal, Effects of non-linearities on a tail plane flutter model, Int Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, paper 60, 1995.
7. G.A. Vio, and J. E. Cooper "Limit Cycle Oscillation prediction For Aeroelastic Systems With Discrete Bilinear Stiffness", Int. J. of Appl. Math. And Mech. Vol. 3(2005), 100-119, 2005.
8. Breitbach E. Effects of structural an-linearities on air craft vibration and testing. Report R-665, AGARD, 1978.
9. Dimitriadis G. Investigation of nonlinear aeroelastic systems. Ph.D. thesis, university of Manchester, 1999.
10. Dimitriadis G. and Cooper JE. characterisation of nonlinear aeroelastic behaviour. RTO Meeting Proceeding 36, structural aspects of flexible aircraft control, Ottawa, Canada, 1999a.
11. Sedaghat A., Cooper JE, Leung AYT, and Wright JR. Limit Cycle Oscillation prediction for aeroelastic systems with continuous non-linearities. Proceeding of the 41th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Sructural Dynamic and materials Conference, Atlanta, Georgia. 2000a.
12. Sedaghat A., Cooper JE, Leung AYT, and Wright JR. Modelling of non-linear aeroelastic instability. ICAS Congress, Harrogate, UK. 2000b.
13. Sedaghat A., Cooper JE, Leung AYT, and Wright JR. prediction of non-linear aeroelastic instabilities ICAS Congress, Harrogate, UK. 2000c.
14. Dowell, E. H., Aeroelasticity of plates and Shells, Noordhoff International Publishing, 1975.
15. Q. Ding, J. E. Cooper, A.Y.T. Leung (2005) "Application Of an improved cell mapping method to bilinear stiffness aeroelastic systems", Journal of Fluids And Structures 20, 35-49, 2005.
16. Chen, J.S., Chian, C.H.. Effects of crank length on the dynamics behavior of a flexible connecting rod. ASME Journal of Vibration and Acoustics 123, 318-323, 2001.
17. Parker, T.S., Chua, L.O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer, New York, 1989.

تعادلی مشاهده می‌شود، که از این لحاظ مطابقت خوبی با نتایج دینگ [15] دارد.

شرایط اولیه را کوچک فرض کرده و  $k=0.5$  را هم قرار می‌دهیم و سرعتی که در آن LCO اتفاق می‌افتد را می‌یابیم (شکل 4).

در این نمودارها مشاهده می‌شود، با  $k$  و شرط اولیه ذکر شده در زیر آن‌ها در سرعت  $V=12.2\text{m/s}$  به حالت عدم همگرایی یا واگرایی در نمودار  $(\theta-t)$  دست‌یافته‌ایم. اما باز هم این فقط در بازه‌ی زمانی 200 ثانیه است، در ادامه این بازه‌ی زمانی را افزایش می‌دهیم تا در همین شرایط سرعت دقیق‌تر بدست آید (شکل 5)

مشاهده می‌شود وقتی زمان را افزایش می‌دهیم، ناگزیر از تغییر سرعت به مقدار بسیار جزئی هستیم، که این به دلیل همگرایی و واگرایی نامطلوبی است که در نمودار  $(\theta-t)$  مشاهده می‌شود. این تغییر سرعت، می‌تواند تخمین بهتری از سرعت فلاتر باشد. یعنی، با  $k$  و شرط اولیه‌ی قبلی در سرعت  $V=12.22\text{m/s}$  به حالت عدم همگرایی یا واگرایی در نمودار  $(\theta-t)$  دست‌یافته‌ایم.

از مقایسه‌ی این نتایج با نتایج دینگ [15] مشاهده می‌شود که در شرایط اولیه و  $k$  یکسان نتیجه‌ی کاملاً مشابهی در مورد سرعت وقوع LCO حاصل شده است.

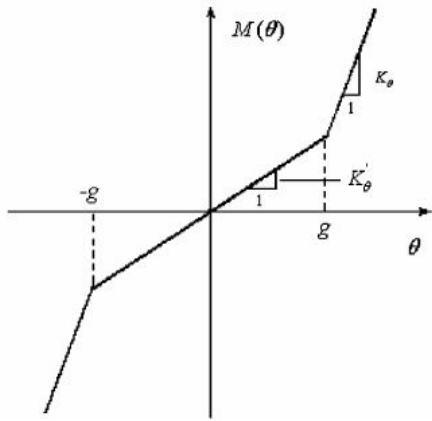
از دیگر موارد مشابه در این پروژه و نتایج دینگ [15] تقارن در نمودارهای  $(\theta'-\theta)$  حول موقعیت تعادلی می‌باشد.

## نتیجه گیری

یکی از مهم‌ترین مسائل مطرح در طراحی سازه‌ی هواپیما، ناپایداری دینامیکی سازه (فلاتر) می‌باشد، که بررسی شد. در اینجا ما از مدل با دو درجه‌ی آزادی استفاده کردیم. در حالت کلی، مدل بال را می‌توان با درجات آزادی مختلف بررسی کرد. به عبارت دیگر، برای مدل ساده شده‌ی بال می‌توان دو نوع مد پیچشی و خمشی در نظر گرفت. ترکیبات مختلف این مدها در واقع به معنای درجات آزادی مختلف برای مدل بال می‌باشند. به منظور بدست آوردن جواب دقیق‌تر پیشنهاد می‌شود از درجات آزادی بالاتر استفاده شود.

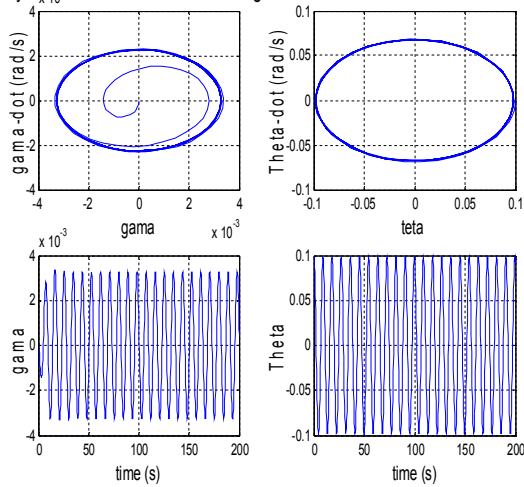
در این مطالعه ما در شرایط خاص ذکر شده به یافتن سرعتی که در آن LCO اتفاق می‌افتد، پرداختیم. پیشنهاد می‌شود که با تغییر شرایط و فرضیات اولیه و تا حد امکان مطابقت این فرضیات با نتایج عملی، در جهت یافتن بقیه‌ی مواردی باشیم که نوسان‌های سیکلی محدود در آن‌ها اتفاق می‌افتد. زیرا همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، این سرعت مرز پایداری است و برای ایمن بودن باید یک حاشیه‌ی ایمنی هم در نظر گرفت، زیرا مدل‌های ریاضی، محاسبات انجام‌شده، حل‌های تقریبی به کاررفته و بسیاری فرضیات و تقریب‌های دیگر باعث ایجاد خطا می‌شوند.

همچنین، ما در این پروژه فقط 2 درجه‌ی آزادی و یک نوع خاصی از غیرخطی‌ها را بررسی کردیم. دقت محاسبات به درجه‌ی آزادی به کار رفته برای مدل بال، دقت بیان آن در مدل‌سازی ریاضی و از همه‌ی این‌ها مهمتر به روش عددی بکار رفته وابسته است.



شکل 3 سختی دو خطی در جهت پیچشی [15]

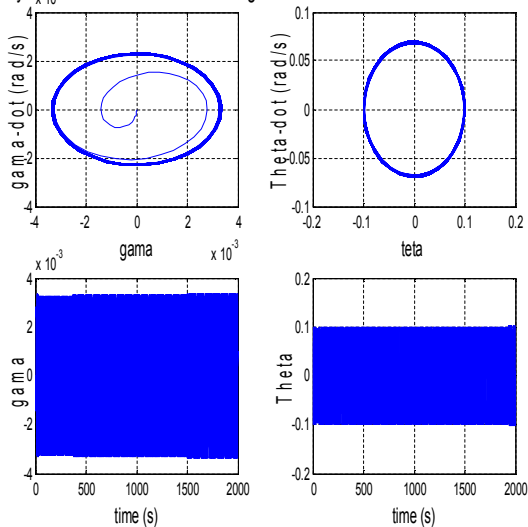
Limit Cycle Oscillations for Hancock Wing Model



شکل 4 LCO های متقارن حول موقعیت تعادلی

$$k = 0.5, V = 12.2 \frac{m}{s}, X_0 = (0, 0.1, 0, 0) \text{ برای}$$

Limit Cycle Oscillations for Hancock Wing Model



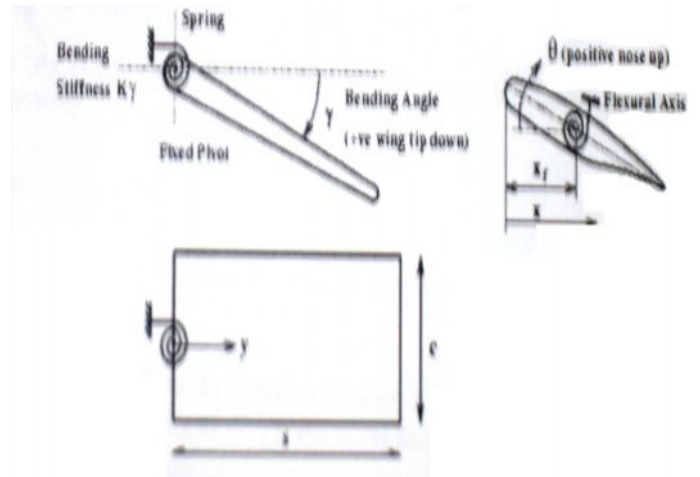
شکل 5 LCO های متقارن حول موقعیت تعادلی

$$k = 0.5, V = 12.22 \frac{m}{s}, X_0 = (0, 0.1, 0, 0) \text{ برای}$$

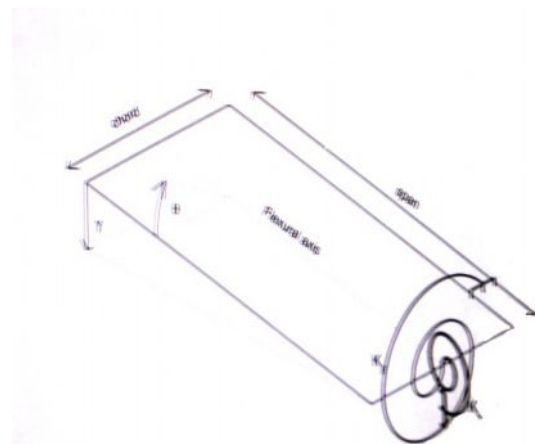
18. Price, S.J., Lee, B.H.K., Alighanbari, H. An analysis of the post-instability behaviour of a two-dimensional airfoil with a structural nonlinearity. Journal of Aircraft 31, 1395–1401, 1994.

19. Tang, D., Conner, M.D., Dowell, E.H. Reduced-order aerodynamic model and its application to a nonlinear aeroelastic system. Journal of Aircraft 35, 332–338, 1998.

شکل ها و نمودارها



شکل 1 شماتیکی از مدل مستطیلی بال با دو درجه‌ی آزادی [15 تا 19]



شکل 2 نمایش درجه‌های آزادی خمش و پیچش در مدل هانکوک [7]