

## بررسی عددی انتقال حرارت در میکرو جریان‌ها با استفاده از روش اختلال

آیدین صابریان<sup>۱</sup>، محسن ثقفیان<sup>۲</sup>، احمد صداقت<sup>۳</sup>، ابراهیم شیرانی<sup>۴</sup>، محمد صادق خلیلی<sup>۵</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان i.saberian@me.iut.ac.ir

<sup>۲</sup>استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان saghafian@cc.iut.ac.ir

<sup>۳</sup>استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان sedaghat@cc.iut.ac.ir

<sup>۴</sup>استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان eshirani@cc.iut.ac.ir

<sup>۵</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان ms.khalili@me.iut.ac.ir

### چکیده

پیشرفت‌ها در زمینه صنعت الکترونیک، تکنولوژی ساخت میکروساختارها و همچنین مهندسی پزشکی در سالهای اخیر، باعث افزایش جذابیت تحقیقات در مورد جریان و انتقال حرارت در میکروکانالها شده است. ساخت دستگا‌های کوچک، نیاز به فهم جریان سیال و انتقال حرارت در هندسه‌های میکرو را افزایش داده است. رفتار جریان سیال و انتقال حرارت در مقیاس میکرو، نسبت به مقیاس معمول بسیار متفاوت است. مطالعات عددی و تجربی زیادی بر روی جریان سیال و انتقال حرارت در میکرو کانالها انجام شده است. فهمیده شد که جریان سیال و انتقال حرارت در یک میکرو کانال از لحاظ کیفی تحت تاثیر اثرات ترقیق، زبری سطح و تراکم پذیری می‌باشند. اصلی‌ترین اثرات ترقیق عبارتند از: لغزش سرعت و پرش دما.

عدد بی‌بعد نودسن که به صورت نسبت پویش آزاد مولکولی سیال،  $\lambda$  به بعد مشخصه مسئله،  $H$  تعریف می‌شود، معیار خوبی برای تعیین درجه رقت می‌باشد:

$$Kn = \lambda / H \quad (1)$$

چهار رژیم جریان مختلف بر اساس مقدار عدد نودسن تعریف می‌شود: جریان‌های پیوسته برای  $Kn \leq 0.001$ ، رژیم جریان لغزشی برای  $0.001 \leq Kn \leq 0.1$ ، رژیم گذرا برای  $0.1 \leq Kn \leq 10$  و رژیم مولکولی آزاد برای  $Kn \geq 10$ . وقتی  $Kn$  افزایش می‌یابد اثرات ترقیق مهمتر می‌شوند. مورینی [۱] یک بازبینی خوبی از داده‌های تجربی در مورد انتقال حرارت جابجایی در میکروکانالها ارائه داد. آمیل و همکارانش [۲] و [۳]، یک جریان آرام گازی در میکرو لوله را با فرض شار حرارتی ثابت در دیواره و همچنین شرایط مرزی لغزش سرعت و پرش دما، بطور تئوری بررسی کردند. آنها فهمیدند که عدد نوسلت کاملاً توسعه یافته، با افزایش عدد نودسن کاهش می‌یابد. هنگ و آساکو انتقال حرارت در میکرو لوله را

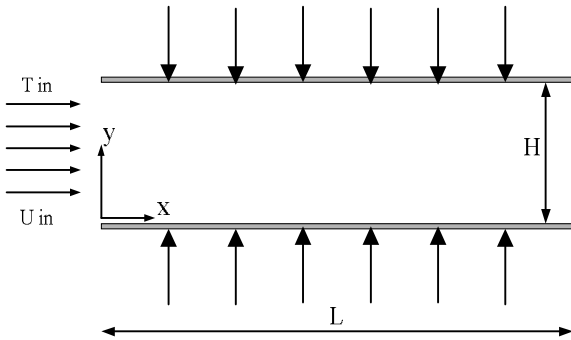
در این تحقیق شیوه‌ی جدیدی از مدل‌سازی انتقال حرارت در میکرو جریان‌ها ارائه شده است. اساس این روش توسعه معادلات حاکم بر دینامیک سیال با استفاده از بسط‌های اختلال میدان‌های سرعت، فشار و دما می‌باشد. در این تحقیق به کمک بسط‌های سه جمله‌ای و بر حسب عدد نودسن، سه دسته معادلات بر حسب عدد نودسن استخراج شده است. شرایط مرزی مربوط به هر دسته از معادلات نیز با جایگزینی بسط‌های اختلال در شرایط مرزی کلی به دست می‌آیند. در مطالعه حاضر یک جریان در حال توسعه هیدرودینامیکی و حرارتی در محدوده‌ی رژیم لغزشی در حالت آرام، دائم، دوبعدی و تراکم‌ناپذیر در یک میکروکانال بین دو صفحه موازی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات منتم و انرژی به همراه شرایط مرزی لغزش سرعت و پرش دما حل شده‌اند. در این مقاله محاسبات برای یک میکروکانال با فرض داشتن شار حرارتی ثابت در دیواره‌ها، به‌منظور به-دست آوردن مشخصه‌های انتقال حرارت در یک جریان گازی لغزشی انجام شده است. در این مطالعه از اثرات تراکم پذیری، اتلاف ویسکوز و همچنین خزش گرمایی صرف نظر شده است. الگوریتم روش عددی برای حل بر اساس الگوریتم سیمپل می‌باشد. حل‌های به‌دست آمده از این روش، با نتایج عددی و تحلیلی موجود مقایسه شده است. نتایج ارائه شده در این تحقیق به‌خوبی با نتایج بدست آمده توسط سایر محققین هم‌خوانی دارند و کاهش اعداد نوسلت و پواسل را در رژیم جریان لغزشی در مقایسه با رژیم پیوسته تائید می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** انتقال حرارت، رژیم لغزشی، میکرو کانال، عدد نوسلت، بسط اختلال.

که  $A$  سطح مقطع کانال و  $\rho$  و  $u$  بترتیب دانسیته و سرعت سیال می‌باشند. همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده، پروفیل سرعت و دما در ورودی کانال یکنواخت در نظر گرفته شده‌اند. همچنین از تعریف عدد رینولدز داریم:

$$Re = \frac{\rho u_{in} D_h}{\mu} \quad (۴)$$

که  $\mu$  ویسکوزیته سیال می‌باشد.



شکل ۱: شرایط و هندسه مسئله

در این تحقیق سیال مسئله گاز نیتروژن، با نسبت گرماهای ویژه  $\gamma = 1.4$  و ویسکوزیته  $\mu = 17.86 \times 10^{-6} \text{ pa.s}$ ، دانسیته  $\rho = 1.1381 \text{ Kg/m}^3$  و پویس آزاد مولکولی  $\lambda = 6.044 \times 10^{-8} \text{ m}$ ، شار حرارتی ثابت در دیواره در نظر گرفته شده است همچنین ضرایب سازگاری سرعت و دما نیز واحد می‌باشند،  $\sigma_v = \sigma_T = 1$ . نتایج بر اساس  $L = 10H$  و سرعت در ورودی کانال طوری انتخاب می‌شود که  $Re = 1$  باشد و شبکه حل  $300 \times 50$  و  $Pr = 0.7$  است.  $H$  را طوری انتخاب می‌کنیم که منجر به عدد نودسن مورد نظر شود به عبارت دیگر تغییر عدد نودسن، با توجه به فرض عدم تراکم پذیری در مسئله و ثابت بودن  $\lambda$ ، با تغییر  $H$  صورت می‌پذیرد. نتایج ارائه شده، مربوط به قسمت کاملاً توسعه یافته هیدرودینامیکی و حرارتی می‌باشد.

### آنالیز اختلال و روش حل

در رژیم جریان لغزشی، معادلات نویر استوکس به همراه شرایط مرزی لغزشی بر جریان حاکم می‌باشند. این معادلات شامل معادله پیوستگی، ممنتوم و انرژی می‌باشند. معادلات حاکم بر مسئله، معادلات ممنتوم و انرژی:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (۵)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (۶)$$

با شار حرارتی ثابت در دیواره بررسی کردند [۴]. قدوسی و همکاران انتقال حرارت در میکروکانال‌های مستطیلی را در شرایط لغزشی و با شار حرارتی ثابت بر روی دیواره بررسی کردند [۵]. تانک و بیازیتوگلو [۶]، یک جریان کاملاً توسعه یافته از لحاظ هیدرودینامیکی، آرام و دائم در میکرو لوله به-همراه دمای یکنواخت و همچنین شار حرارتی یکنواخت در دیواره را با استفاده از تکنیک انتگرال و لحاظ کردن پرش دمایی در دیواره و اثرات ویسکوز مورد بررسی قرار دادند. آیدین و آوکی [۷]، انتقال حرارت جابجایی آرام یک سیال نیوتنی در یک میکروکانال بین دو صفحه موازی، را بطور تحلیلی مطالعه کردند. اینمن و همکارانش [۸]، انتقال حرارت آرام جریان لغزشی را بین دو صفحه موازی با شار حرارتی ثابت در دیواره بررسی کردند و فرمولی برای محاسبه عدد نوسلت در این شرایط ارائه کردند.

در این مقاله، یک مطالعه عددی بر روی انتقال حرارت جابجایی بین دو صفحه موازی تحت شار حرارتی یکنواخت در دیواره در رژیم لغزشی انجام شد. برای بسط و توسعه معادلات حاکم، از سه ترم بسط اختلال برای سرعت، فشار و دما استفاده شده است. سپس مراتب مختلفی از معادلات بر اساس عدد نودسن بدست آمده و این معادلات با استفاده از الگوریتم سیمپل حل شده‌اند. در نهایت در مورد اعداد پواسل و نوسلت بدست آمده بحث شده است.

### تشریح مسئله:

جریان در حال توسعه هیدرودینامیکی و حرارتی، آرام، دائم، تراکم ناپذیر، با خواص ثابت سیال، در یک میکروکانال بین دو صفحه موازی را در نظر گرفته و عدد نوسلت بصورت زیر تعریف شده است:

$$Nu = \frac{hD_h}{k} = \frac{q_w 2H}{k(T_w - T_m)} \quad (۲)$$

که  $h$  ضریب انتقال حرارت جابجایی،  $D_h = 2H$  قطر هیدرودینامیکی کانال و  $k$  رسانایی دیواره می‌باشند. طبق شکل ۱،  $H$ ، فاصله بین دو صفحه،  $T_w$  و  $T_m$ ، بترتیب دمای دیواره و دمای متوسط سیال در مقطع کانال می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

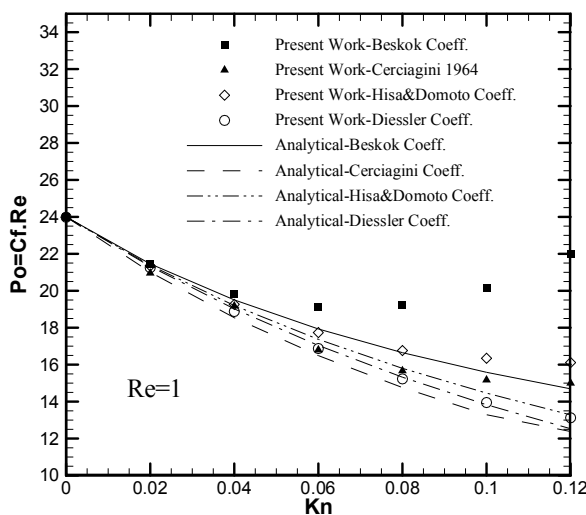
$$T_m = \frac{\int_A \rho u T dy}{\int_A \rho u dy} \quad (۳)$$

Cercignani (Hadjiconstantinou 2003)	1.1466	0.647
Deissler (1964)	1	9/8
Hisa and Domoto (1983)	1	0.5
Schamberg (1947)	1	5 $\pi$ /12
Maxwell (Kennard 1938)	1	0
Beskok (2003)	1	-0.5

از طرفی می‌توان نشان داد که برای جریان توسعه یافته با استفاده از معادله نویر استوکس و مدل لغزشی مرتبه دوم، عدد پواسل برای جریان توسعه یافته از رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$Po = C_f \cdot Re = \frac{24}{(1 + 6C_1Kn + 12C_2Kn^2)} \quad (14)$$

در این مقاله، نتایج عددی بدست آمده با استفاده از ضرایب پیشنهادی با نتایج رابطه (۱۴) در شکل ۲ مقایسه شده است و به این جمع بندی رسیدیم که نتایج عددی بدست آمده با استفاده از ضرایب پیشنهادی توسط هیسا و دوموتو همخوانی بیشتری با نتایج تئوری مربوط به رابطه (۱۴) دارد.



شکل ۲: تغییرات عدد پواسل کاملاً توسعه یافته با عدد نودسن، مقایسه بین نتایج عددی این تحقیق و نتایج حاصله از رابطه (۱۴)

از حل دسته معادلات حاصله از جایگزاری بسط‌های اختلال، پروفیل‌های دمایی به صورت زیر در شکل‌های ۳ نمایش داده شده‌اند:

$$\rho C_p \frac{Du}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (7)$$

با جایگزینی بسط‌های اختلال سرعت، فشار و دما، توسعه می‌یابند:

$$u = u_0 + Kn u_1 + Kn^2 u_2 + \dots \quad (8)$$

$$p = p_0 + Kn p_1 + Kn^2 p_2 + \dots \quad (9)$$

$$T = T_0 + Kn T_1 + Kn^2 T_2 + \dots \quad (10)$$

پس از جایگزاری معادلات (۸) تا (۱۰) در معادلات نویر استوکس، سه مرتبه از معادلات نسبت به عدد نودسن استخراج شده است. شرایط مرزی هر دسته از این معادلات از طریق جایگزاری بسط‌های اختلالی در شرایط مرزی کلی برای لغزش سرعت و پرش دما حاصل شده است. این مجموعه از معادلات در حالت دو بعدی با استفاده از روش حجم محدود و بر روی یک شبکه جابجا شده گسسته‌سازی شده‌اند. هر دسته معادلات بطور جداگانه با استفاده از الگوریتم سیمپل و شرایط مرزی مربوطه حل می‌شوند و در نهایت جوابهای هر دسته از معادلات را در بسط اختلال قرار داده و هر یک از پارامترهای سرعت، فشار و دما را محاسبه می‌کنیم. شرایط مرزی مرتبه اول برای لغزش سرعت و پرش دما بر مبنای تئوری جنبشی گازها توسط ماکسول و اسمولوچوفسکی ارائه شده است [۹]. با استفاده از آنالیز تقریبی گاز در شرایط همدمای و بر مبنای تئوری جنبشی گازها، شرایط مرزی مرتبه بالاتر برای لغزش سرعت و پرش دما بدست می‌آیند. شکل بی بعد این شرایط مرزی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$U_s - U_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left[ C_1 Kn \frac{\partial U}{\partial n} + C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right] \quad (11)$$

$$T_s - T_w = \frac{2 - \sigma_t}{\sigma_t} \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right) \frac{1}{Pr} \left[ C_1 Kn \frac{\partial T}{\partial n} + C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right] \quad (12)$$

$n$  جهت عمود بر دیواره کانال می‌باشد. شرط مرزی کلی مرتبه دوم برای لغزش سرعت در شکل بی بعدش به صورت ریز می‌باشد:

$$U_s - U_w = C_1 Kn \frac{\partial U}{\partial n} - C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \quad (13)$$

در اعداد نودسن بالا، شرط مرزی بدون لغزش نقض می‌شود و سیال روی دیواره می‌لغزد. محققان مختلف،  $C_1$  و  $C_2$  های مختلفی را برای شرط مرزی لغزش سرعت پیشنهاد کردند که آنها در جدول ۱ ارائه کرده ایم [۱۰].

جدول ۱:  $C_1$  و  $C_2$  های پیشنهادی برای شرط مرزی لغزش

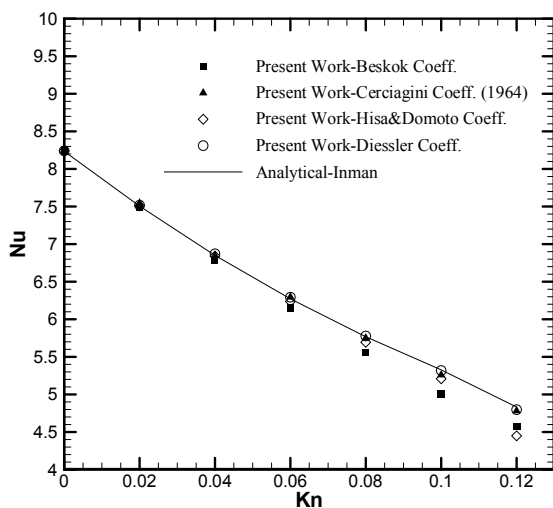
توسط افراد مختلف

Author	$C_1$	$C_2$
Cercignani (Cercignani and Daneri 1963)	1.1466	0.9756

شکل ۳: پروفیل دما در مراحل مختلف حل برای  $Re = 1$ ،

$$Kn = 0.06 \text{ و } Pr = 0.7$$

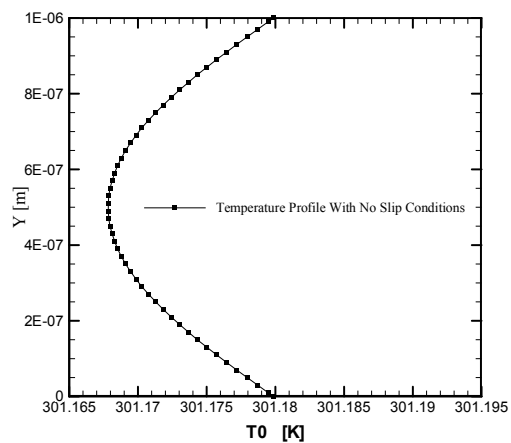
به همین ترتیب عدد نوسلت متناظر با ضرایب پیشنهادی و آنچه اینمن [۹] به صورت یک رابطه ارائه داد، را به دست آوردیم و در شکل (۴) نشان داده شده است. در این شکل تغییرات نوسلت با افزایش لغزش نشان داده شده و دیده می شود که با افزایش نودسن انتقال حرارت کاهش می یابد چون با افزایش نودسن لغزش سرعت و پرش دمایی در دیواره بیشتر می شود. افزایش لغزش سرعت، به تنهایی باعث افزایش انتقال حرارت می شود و اثر افزایش پرش دمایی به تنهایی کاهش انتقال حرارت است چون پرش دمایی مانند یک مقاومت گرمایی عمل می کند. اثر همزمان افزایش لغزش سرعت و پرش دمایی در نهایت باعث کاهش نوسلت می شود.



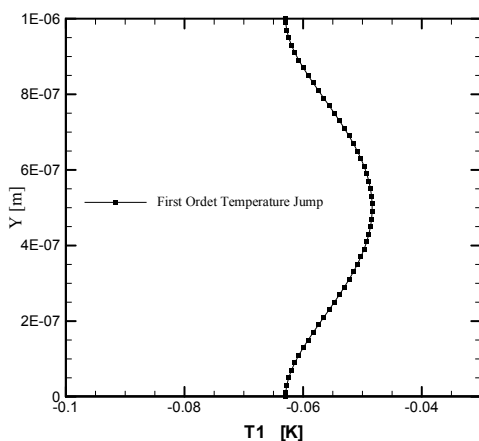
شکل ۴: تغییرات نوسلت کاملاً توسعه یافته با عدد نودسن وقتی

$$Pr = 0.7 \text{ و } Re = 1$$

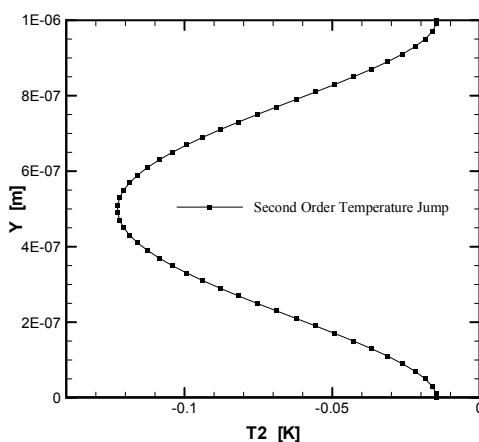
افزایش لغزش، طول ورودی را افزایش می دهد. این موضوع در نتایج عددی ما که به صورت شکل ۵ نشان داده شده، به دست آمده است. در این شکل نیز می توان بار دیگر دید که افزایش نودسن، انتقال حرارت را کاهش می دهد.



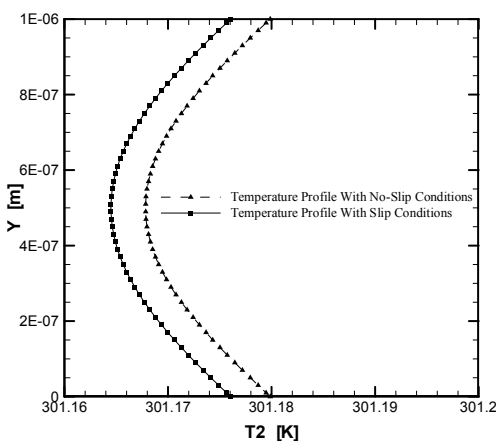
(الف)



(ب)



(ج)

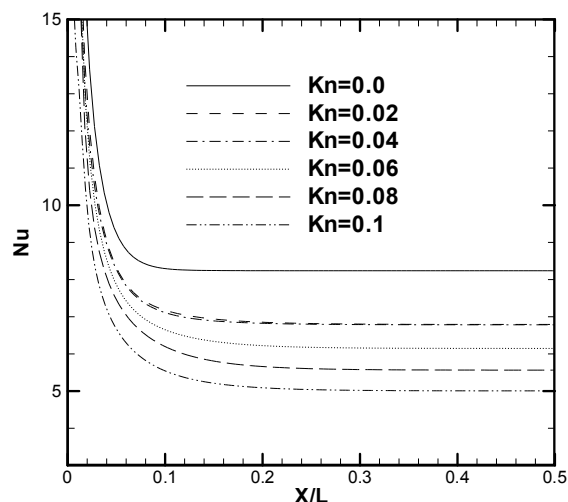


(د)

نوسلت با افزایش عدد نودسن است. همچنین طول ورودی با افزایش نودسن را نشان می‌دهد.

#### مراجع

- [1] Morini, G. L., "Single-Phase Convective Heat Transfer in Microchannels: a review of experimental results", *Int. J. Thermal Science*. 43(2004) 631-651.
- [2] Yu, S., Ameen, T.A., "Slip Flow Heat Transfer in rectangular microchannels", *Int. J. Heat Mass Transf.* 44(2001) 4225-4234
- [3] Yu, S., Ameen, T.A., "Slip Flow Convection in isoflux rectangular microchannels", *J. Heat Transf.* 124(2002) 346-355
- [4] Hong, C., Asako Y., "Heat transfer characteristics of gaseous flow in microtube with constant wall flux", *Applied Thermal Engineering*, 28(2008) 1375-1385.
- [5] Kuddusi L., Cetegen, E. "Prediction of temperature distribution and nusselt number in rectangular micro-channels at wall slip condition for all versions of constant heat flux", *Int. J. Heat and Fluid flow* 28(2007) 777-786.
- [6] Tunc G., Bayazitoglu, Y. "Heat transfer in rectangular microchannels", *Int. J. Heat and Mass transfer* 45(2002) 765-773.
- [7] Aydin, O., Avci, M., "Heat and Fluid Flow characteristics of gases in micropipes". *Int. J. Heat Mass Transf.* 49(2006) 1723-1730
- [8] Inman, R. M., 1964, "Heat transfer for laminar slip flow of a rarefied gas in a parallel plate channel or a circular tube with uniform wall heat flux", NASA TND-2213.
- [9] Kennard, E. H., 1938. *Kinetic theory of gases*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York.
- [10] Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., 2005. *Microflows and Nanoflows-fundamentals and simulation*. Springer Science and Business Media Inc., New York.



شکل ۵: تغییرات محوری عدد نوسلت در نودسن های مختلف

#### نتیجه گیری

در این مقاله، جریان سیال و انتقال حرارت در یک میکروکانال متشکل از دو صفحه موازی، در حالت آرام و دائم، تراکم‌ناپذیر در رژیم جریان لغزشی بصورت عددی شبیه‌سازی شده است. این شبیه‌سازی به کمک روش بسط اختلالات انجام شده است. در این روش مولفه‌های سرعت، فشار و دما بر حسب عدد نودسن بسط داده شدند و با جایگزینی در معادلات نویر استوکس مراتب مختلفی از این معادلات بر حسب عدد نودسن بدست آمد. سپس با حل این معادلات میدان‌های سرعت و دما بدست آمد. نتایج بدست آمده در این تحقیق نشان داده است که مدل مطرح شده بر اساس روش بسط اختلال قابلیت پیش‌بینی مناسب نتایج را در رژیم لغزشی دارد. نتایج بدست آمده نشان دهنده کاهش عدد