

بررسی عددی جریان میکروکوئنت با استفاده از روش اختلال

محمد صادق خلیلی^۱، محسن ثقفیان^۲، احمد صداقت^۳، ابراهیم شیرانی^۴، آیدین صابریان^۵

^۱دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان ms.khalili@me.iut.ac.ir
^۲استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان saghafian@cc.iut.ac.ir
^۳استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان sedaghat@cc.iut.ac.ir
^۴استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان eshirani@cc.iut.ac.ir
^۵دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان i.saberian@me.iut.ac.ir

چکیده

در این تحقیق شیوه‌ی جدیدی از مدل‌سازی میکروجریان‌ها ارائه گردیده است. اساس این روش، توسعه‌ی معادلات پیوسته‌ی حاکم بر دینامیک سیال با استفاده از بسط اختلالی میدان‌های سرعت، فشار، دانسیته و دما می‌باشد. در کار حاضر به کمک بسط‌های اختلالی سه‌جمله‌ای و بر حسب عدد نودسن، سه مرتبه از معادلات نسبت به عدد نودسن استخراج شده است. شرایط مرزی لازم برای حل هر مرتبه از این معادلات، از طریق جایگزاری بسط‌های اختلالی در شرایط مرزی کلی برای لغزش سرعت و پرش دما حاصل شده است. این مجموعه از معادلات در حالت دو بعدی با استفاده از روش حجم محدود و بر روی یک شبکه‌ی جابجاشده گسسته‌سازی شده‌اند. به‌منظور حل مجموعه‌ی معادلات گسسته‌سازی شده، یک برنامه‌ی کامپیوتری سه‌بخشی تدوین شده است. هر بخش از این برنامه یک مرتبه از معادلات را با استفاده از الگوریتم سیمپل حل می‌کند. جریان تراکم‌ناپذیر و لغزشی میکروکوئنت^۱، با استفاده از روش اختلال^۲ هم به‌صورت تحلیلی و هم به‌صورت عددی حل شده است. در محدوده رژیم لغزشی توافق بسیار خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی یافت می‌شود. با افزایش عدد نودسن، نتایج عددی به تدریج از نتایج تحلیلی فاصله می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی

میکروجریان، روش اختلال، رژیم لغزشی، میکروکوئنت

مقدمه

رژیم جریان بر اساس عدد نودسن به چهار دسته تقسیم می‌گردد: رژیم پیوسته ($Kn < 0.01$)، رژیم لغزشی ($0.1 < Kn < 0.01$)، رژیم گذار ($10 < Kn < 0.1$) و رژیم ملکولی آزاد ($Kn < 10$). سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، وسایلی هستند که طول مشخصه‌ی هندسی آن‌ها بین ۱ میکرون تا ۱ میلی‌متر می‌باشد و اغلب در محدوده‌ی رژیم لغزشی و گذار کار می‌کنند. کاربرد این سیستم‌ها در حوزه‌های صنعتی و پزشکی رو به افزایش می‌باشد. به دلیل سختی‌های

تست عملی این وسایل، از روش‌های عددی برای بررسی جریان در میکروکانال‌ها استفاده می‌شود. هرچه رژیم جریان به سمت رژیم ملکولی پیش برود، استفاده از مدل‌سازی‌های ملکولی کاراتر می‌شود و بالعکس هرچه رژیم جریان به سمت رژیم پیوسته برود، استفاده از مدل‌سازی‌های پیوسته مفید و آسان‌تر می‌گردد [۱ و ۲].

در دهه‌ی اخیر فعالیت‌های زیادی در زمینه‌ی شبیه‌سازی پیوسته‌ی میکروجریان‌ها انجام شده است. در اکثر آن‌ها از مدل‌های لغزشی مرتبه‌اول و مرتبه‌دوم برای لغزش سرعت و پرش دما بر روی سطح دیوار استفاده شده است. برای مثال، آقای چن و همکاران [۳] با استفاده از معادلات ناپیراستوکس و شرایط مرزی مرتبه‌ی اول برای لغزش سرعت و پرش دما، جریان گاز در میکروکانال‌ها را در محدوده‌ی رژیم لغزشی بررسی کرده‌اند. همچنین، آقای دانگری و همکاران [۴]، جریان گاز در میکروکانال‌ها را بوسیله‌ی معادلات ناپیراستوکس و شرایط مرزی مرتبه‌ی دوم مختلف بررسی کرده‌اند. چالش مهمی که در این نوع از شبیه‌سازی‌ها وجود دارد، نوع و صحت مدل لغزشی به کار رفته می‌باشد.

در کار حاضر، با روش اختلال که یک روش پیوسته است، جریان ناشی از برش و لغزشی میکروکوئنت بررسی می‌گردد. شرایط مرزی لازم برای هر مرحله از این روش، از شرایط مرزی کلی و مرتبه‌بالا حاصل می‌شود. بنابراین اگر از بسط‌های اختلالی با جملات کافی استفاده شود، انتظار جواب‌های دقیق‌تری نسبت به دیگر روش‌های پیوسته‌ی می‌رود. جریان همدما و تراکم‌ناپذیر فرض شده و بسط‌های اختلالی میدان سرعت و فشار سه‌جمله‌ای در نظر گرفته می‌شوند.

معادلات حاکم و شرایط مرزی لغزشی

در رژیم جریان لغزشی، معادلات ناپیراستوکس به‌همراه شرایط مرزی لغزشی بر جریان حاکم می‌باشند. معادلات ناپیراستوکس شامل معادله‌ی پیوستگی، معادلات ممنتوم و معادله‌ی انرژی می‌باشد. شرایط مرزی مرتبه‌ی اول برای لغزش سرعت و پرش دما بر مبنای تئوری جنبشی گازها توسط آقای ماکسول و اسمولوچوفسکی ارائه شده است [۵]. با استفاده از آنالیز تقریبی گاز در شرایط همدما، و بر مبنای تئوری جنبشی گازها، شرایط مرزی مرتبه‌بالا برای لغزش

سرعت و پرش دما به دست می آید. شکل بی بعد این شرایط مرزی برای جریان های دوبعدی به صورت زیر می باشد [۲]:

$$U_s - U_w = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left[Kn \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_s + \frac{Kn^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \right)_s + \dots \right] \quad (1)$$

$$T_s - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{Pr} \left[Kn \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s + \frac{Kn^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} \right)_s + \dots \right] \right] \quad (2)$$

در این روابط n جهت عمود بر دیواره ی کانال و s جهت مماس بر دیواره می باشد.

توسعه ی معادلات و شرایط مرزی حاکم با روش اختلال

به طور کلی، هر خاصیت ماکروسکوپیک جریان را می توان به صورت یک سری هندسی بر حسب عدد نودسن بسط داد [۲ و ۶]:

$$\phi = \phi_0 + Kn \phi_1 + Kn^2 \phi_2 + Kn^3 \phi_3 + O(Kn^4) \quad (3)$$

$$\phi = u, v, w, P, T, \rho, \dots$$

که در آن ϕ_0 مربوط به جریان غیرلغزشی، ϕ_1 تصحیح مرتبه ی اول، ϕ_2 تصحیح مرتبه ی دوم، ϕ_3 تصحیح مرتبه ی سوم میدان ϕ و الی آخر می باشند. هر چه عدد نودسن بیشتر شود و یا به عبارتی به سمت رژیم گذار و ملکولی آزاد برویم، مراتب بالاتری از تصحیح ϕ مهم می شود. بسط های اختلالی سه جمله ای و یا به عبارت دیگر بسط های دوتصحیحی میدان سرعت و میدان فشار را در نظر می گیریم:

$$u = u_0 + Kn u_1 + Kn^2 u_2 + O(Kn^3) \quad (4)$$

$$P = P_0 + Kn P_1 + Kn^2 P_2 + O(Kn^3) \quad (5)$$

اکنون بسط های اخیر را در معادلات پیوستگی و ممنتوم حاکم بر جریان تراکم ناپذیر سیال و همچنین شرایط مرزی مرتبه بالای لغزش سرعت قرار می دهیم. پس از مرتب سازی معادلات بر حسب توان های عدد نودسن و برابر قرار دادن عبارت های هم مرتبه در طرفین معادلات، به مراتب مختلفی از معادلات و شرایط مرزی مربوط به هر یک بر حسب عدد نودسن می رسیم.

معادلات پیوستگی، ممنتوم و شرط لغزش سرعت مرتبه ی $O(1)$:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial(u_0 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0 u_0)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + S_{C_u} + S_{P_u} u_0 \quad (7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial x} + \frac{\partial(v_0 v_0)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + S_{C_v} + S_{P_v} v_0 \quad (8)$$

$$u_0|_s = u_w \quad (9)$$

$$u_0|_s = u_w$$

معادلات پیوستگی، ممنتوم و شرط لغزش سرعت مرتبه ی $O(Kn)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + 2 \frac{\partial(u_0 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1 u_0)}{\partial y} + \frac{\partial(v_0 u_1)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + S_{P_u} u_1 \quad (11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 v_0)}{\partial x} + \frac{\partial(u_0 v_1)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(v_0 v_1)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + S_{P_v} v_1 \quad (12)$$

$$u_1|_s = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} L_c \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)_s \quad (13)$$

معادلات پیوستگی، ممنتوم و شرط لغزش سرعت مرتبه ی $O(Kn^2)$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_2}{\partial t} + 2 \frac{\partial(u_0 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2 u_0)}{\partial y} + \frac{\partial(v_0 u_2)}{\partial y} + \frac{\partial(v_1 u_1)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + S_{P_u} u_2 \quad (15)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 v_0)}{\partial x} + \frac{\partial(u_0 v_2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_1 v_1)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(v_0 v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(v_1 v_1)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + S_{P_v} v_2 \quad (16)$$

$$u_2|_s = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \left[L_c \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{L_c^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} \right]_s \quad (17)$$

شرط مرزی لغزش سرعت بر روی دیوار، در جهت x نوشته شده است و اگر دیوار در جهت y باشد در روابط مذکور از مولفه ی v سرعت استفاده می شود. L_c طول مشخصه هندسی و S سورس ترم می باشد که به صورت خطی از متغیر مربوطه تقریب زده می شود.

گسسته سازی و الگوریتم حل معادلات

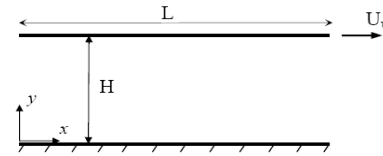
مرتبه های مختلف معادلات حاصل را با استفاده از روش حجم محدود و بر روی یک شبکه ی جابه جا شده گسسته سازی می کنیم. در جریان های میکرو و نانو به دلیل سرعت های پایین و ابعاد بسیار ریز شبکه، رینولدز سلول شبکه معمولاً خیلی کوچک است. به عبارت دیگر نقش دیفیوژن مهم و غیر قابل صرف نظر کردن می باشد. جملات دیفیوژن را به صورت مرکزی تقریب می زنیم. در جملات کانوکشن نیاز به میان یابی سرعت ها روی وجوه سلول شبکه می باشد. این سرعت ها را نیز به صورت مرکزی میان یابی می کنیم.

الگوریتم کلی حل شامل سه مرحله می باشد: مرحله ی اول، حل معادلات مرتبه ی $O(1)$ به همراه شرایط مرزی مرتبه ی $O(1)$. مرحله ی دوم، حل معادلات مرتبه ی $O(Kn)$ به همراه شرایط مرزی مرتبه ی $O(Kn)$. شرایط مرزی این مرحله از طریق برازش میدان های مرحله ی اول بر روی دیواره ها حاصل می گردد. مرحله ی سوم، حل معادلات مرتبه ی $O(Kn^2)$ به همراه شرایط مرزی مرتبه ی $O(Kn^2)$. شرایط مرزی این مرحله از طریق برازش میدان های مرحله ی اول و دوم بر روی دیواره ها حاصل می گردد. در هر یک از مراحل سه گانه از روش سیمپل استفاده می شود. نهایتاً با استفاده از

بسطهای اختلاالی، میدانهای سرعت و فشار برای جریان لغزشی معین می گردند.

جریان میکروکوئنت

جریان ایزوترمال، پایا، یکبعدی، تراکم ناپذیر و ناشی از برش بین دو صفحه موازی را مطابق شکل ۱ در نظر می گیریم.



شکل ۱: هندسه ی جریان میکروکوئنت

در این مسئله $\sigma_v=1$, $U_w=0.1\text{ m/s}$, $L=5\mu\text{m}$, $H=1\mu\text{m}$, $Kn=0.06$ و فشار 1 atm می باشد.

حل تحلیلی مسئله ی توسعه یافته با استفاده از روش اختلال:

با توجه به اینکه u در جهت x و P در جهت y تغییری نمی کنند و نیز $v=0$ می باشد، مرتبه های مختلف معادله ی x ممنتوم ساده شده و با شرط مرزی لغزش سرعت مربوط به خود به راحتی حل می شوند. در جریان تراکم ناپذیر، لغزش دبی جریان را تغییر نمی دهد یعنی $\dot{m} = \dot{m}_0$ و $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dots = 0$ و بنابراین:

$$u_0(y) = U_w \left(\frac{y}{H}\right) \quad (18)$$

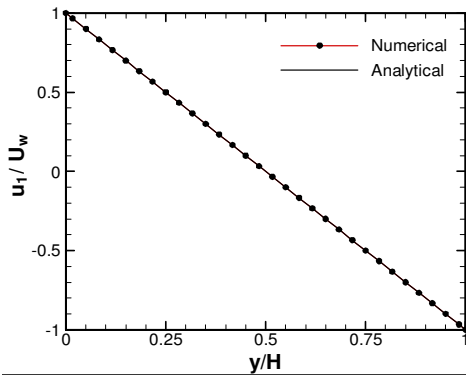
$$u_n(y) = \left(-\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\right)^n \times 2^{n-1} \times U_w \times \left(\frac{2y}{H}-1\right), \quad n \geq 1 \quad (19)$$

اگر سرعت های به دست آمده را در بسط اختلاالی سرعت قرار دهیم و n را نامحدود فرض کنیم پروفیل سرعت لغزشی نهایی حاصل می شود:

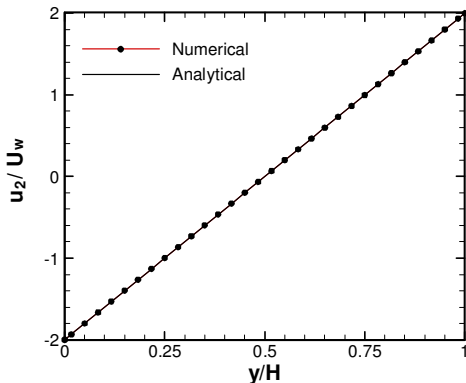
$$u(y) = U_w \left[\frac{\frac{y}{H} + \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} Kn}{1 + 2 \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} Kn} \right], \quad Kn < \frac{1}{2 \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}} \quad (20)$$

حل عددی مسئله ی توسعه یافته با روش اختلال:

برای حل عددی این مسئله از شبکه ی یکنواخت 75×30 استفاده شده است. در شکل های ۲ الی ۴، سرعت غیرلغزشی و تصحیحات سرعت در مقطع میانی میکروکانال با نتایج تحلیلی مقایسه شده اند.



شکل ۳: پروفیل توسعه یافته و بی بعد تصحیح اول سرعت، u_1



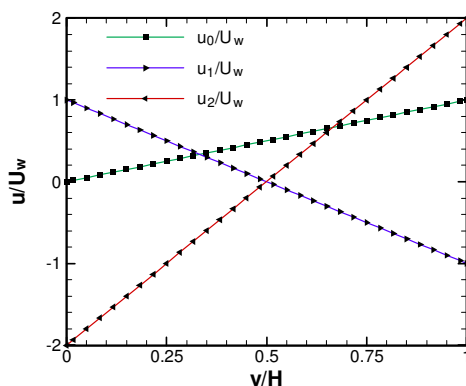
شکل ۴: پروفیل توسعه یافته و بی بعد تصحیح دوم سرعت، u_2

در شکل های ۵ و ۶، نتایج عددی سرعت غیرلغزشی، تصحیحات سرعت و سرعت لغزشی با یکدیگر مقایسه شده اند. توافق بسیار خوبی بین نتایج عددی و تحلیلی روش اختلال مشاهده می شود. همچنین با توجه به رابطه ی ضریب اصطکاک $C_f = \tau_w / (0.5 \times \rho U_w^2)$ روابط تحلیلی زیر را می توان نوشت:

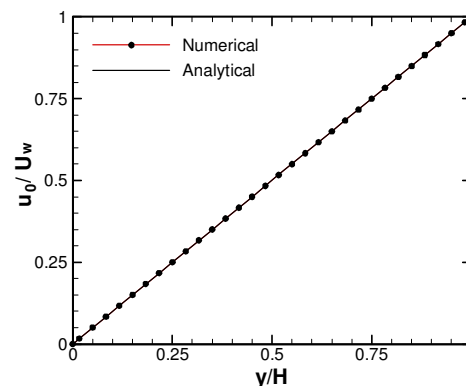
$$(C_f Re)_{no\ slip} = 2 \quad (21)$$

$$(C_f Re)_{slip} = \frac{2}{1 + 2 \frac{2-\sigma_v}{\sigma_v} Kn} \quad (22)$$

در شکل ۷ نتایج عددی و تحلیلی روش اختلال برای ضریب اصطکاک سطوح بر حسب عدد نودسن مقایسه شده است.



شکل ۵: مقایسه ی سرعت های u_0 , u_1 و u_2 با یکدیگر



شکل ۲: پروفیل توسعه یافته و بی بعد سرعت غیرلغزشی u_0

فهرست علائم

معرف مرتبه	O
فشار برای جریان لغزشی، Pa	P
عدد پرانتل	Pr
عدد رینولدز	Re
دما برای جریان لغزشی، K	T
مولفه‌های سرعت، m/s	u, v, w
بردار سرعت، m/s	u

علائم یونانی

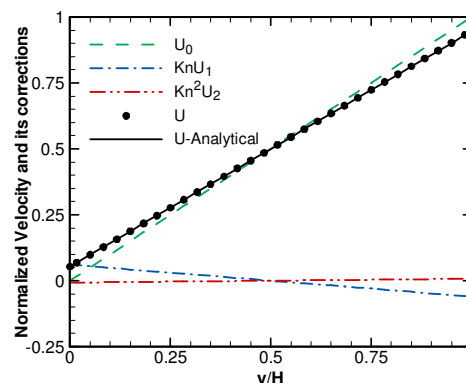
نسبت گرماهای ویژه	γ
ضریب اول ویسکوزیته، kg/(m.s)	μ
چگالی برای جریان لغزشی، kg/m ³	ρ
ضریب حرارتی	σ_T
ضریب ممنتوم مماسی	σ_v
تنش برشی روی دیوار، N/m ²	τ_w

زیر نویس

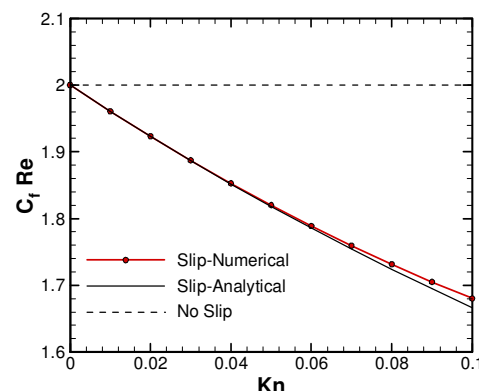
معرف بخش ثابت در خطی‌سازی سورس	C
معرف شیب سورس خطی‌شده	P
معرف لغزشی و جهت مماس بر دیوار	s
معرف دیوار	w
مربوط به جریان غیرلغزشی	0
مربوط به تصحیح مرتبه‌ی اول	1
مربوط به تصحیح مرتبه‌ی دوم	2
مربوط به تصحیح مرتبه‌ی n و جهت عمود بر دیوار	n

مراجع

- [1] Gad-el-Hak, M., 2006. *The MEMS Handbook - Introduction and fundamentals*. CRC Press, New York.
- [2] Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., 2005. *Microflows and Nanoflows - fundamentals and simulation*. SpringerScience and Business Media, Inc., New York.
- [3] Chen, C. S., Lee, S. M. and Sheu, J. D., 1998. "Numerical analysis of gas flow in microchannels". *Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 33*, pp. 749-762.
- [4] Dongari, N. and Agrawal, A., 2007. "Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels". *International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 50*, pp. 3411-3421.
- [5] Kennard, E. H., 1938. *Kinetic theory of gasses*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York.
- [6] Qin, F. H., Sun, D. J. and Yin, X. Y., 2007. "Perturbation analysis on gas flow in a straight microchannel". *Physics of fluids, Vol. 19*, May, pp. 027103-14.
- [7] Khalili, M. S., Saghafian, M., Shirani, E. and Saberian, A., 2011. "Modeling of micro flows using perturbation method". *3rd Micro and Nano Flows Conference, Thessaloniki, Greece, 22-24 August 2011*. See also URL [http:// www.mnf2011.com](http://www.mnf2011.com).



شکل ۶: مقایسه‌ی سرعت غیرلغزشی، تصحیحات سرعت و سرعت لغزشی برای نودسن ۰/۰۶



شکل ۷: تغییرات ضریب اصطکاک بر حسب عدد نودسن

جریان میکروکوئنت ناشی از برش است و تراکم‌پذیری برای این جریان در مقایسه با جریان‌های ناشی از اختلاف فشار، ناچیز می‌باشد. همان‌گونه که از شکل‌های فوق بر می‌آید، روش اختلال سه‌جمله‌ای برای جریان همدمای میکروکوئنت در رژیم لغزشی مناسب می‌باشد.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، جریان تراکم‌ناپذیر و برشی میکروکوئنت با روش اختلال به دو شکل تحلیلی و عددی حل شده است. توسعه‌ی معادلات و شرایط مرزی حاکم با کمک بسط‌های اختلالی سه‌جمله‌ای، به سه مرتبه از معادلات و شرایط مرزی مربوط به هر یک منجر شده است. مجموعه‌ی معادلات حاصل شده در حالت دوبعدی، با روش حجم محدود و بر روی یک شبکه‌ی جابجا شده گسسته‌سازی شده‌اند. هر مرتبه از این معادلات گسسته به‌همراه شرایط مرزی مربوطه، توسط الگوریتم سیمپل حل شده است. در محدوده رژیم لغزشی توافق بسیار خوبی بین نتایج عددی و نتایج تحلیلی وجود دارد. با افزایش عدد نودسن، بایستی از تصحیحات بیشتری در روش اختلال استفاده نمود. همچنین با افزایش عدد نودسن بایستی اثرات تراکم‌پذیری را در نظر گرفت.

نویسندگان این مقاله، تحقیقات مختلفی را با استفاده از روش حاضر انجام داده‌اند. از جمله آن‌ها بررسی جریان میکروپویزیل [۷]، جریان میکروحفره و نیز بررسی جریان‌های تراکم‌پذیر می‌باشد.