

حل تحلیلی تاثیر دیواره قابل انعطاف بر کاهش درگ وسایل آیرو دینامیکی

مهدی جهانگیری

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

M.Jahangiri@me.iut.ac.ir

احمد صداقت

استادیار مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

Sedaghat@cc.iut.ac.ir

بهنام عباسی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه
صنعتی اصفهان

B.Abbasi@me.iut.ac.ir

محسن ثقفیان

استادیار مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی اصفهان

Saghafian@cc.iut.ac.ir

چکیده

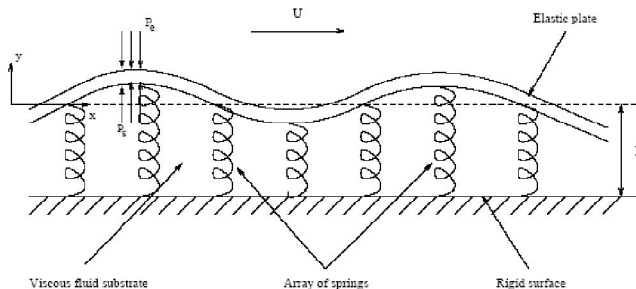
بدلیل کاهش ضریب درگ اصطکاکی در وسایل آیرو دینامیکی خارجی، جریان آرام به جریان درهم ترجیح داده می شود. در کار حاضر احتمال به تأخیر افتادن ناحیه ی گذار جریان، در جریان ۲ بعدی بلازیوس مورد بررسی قرار گرفته و از مدل صفحه- فنر کرامر برای شبیه سازی سطح انعطاف پذیر استفاده شده است. برای بررسی پایداری خطی سمت سیال، با ساده سازی معادلات ناویراستوکس و قرار دادن اغتشاشات دو بعدی نمایی کوچک و استفاده از روش پایداری زمانی، معادله دیفرانسیل معمولی اورسامرفیلد بدست آمد. سپس معادله اورسامرفیلد با بدست آوردن جریان پایه بلازیوس و شرایط مرزی مربوط به سطح انعطاف پذیر، به صورت عددی حل شده است. نتایج بدست آمده نشان می دهند که با کنترل ضریب سختی ارتعاشی سطح انعطاف پذیر، ناحیه گذار جریان به تعویق افتاده و جریان پایداری بدست می آید. در حالتی که سطح صلب است، نتایج با کارهای انجام شده مقایسه گردیدند و تفاوت بسیار کمی مشاهده شد که عمدتاً ناشی از ساده سازی هایی است که در حل تحلیلی اخیر انجام شده است. نتایج بیانگر کوچکتر شدن ناحیه ناپایداری با کاهش ضریب سختی ارتعاشی دیوار می باشند

واژه های کلیدی: دیوار انعطاف پذیر، پایداری لایه مرزی، اغتشاشات دو بعدی، منحنی پایداری خنثی، کاهش درگ.

بسیاری از گونه‌های آبی مانند دلفین‌ها و وال‌ها بدلیل داشتن پوشش انعطاف‌پذیر، با به تأخیر انداختن ناحیه گذار قادر هستند به سرعت‌های بالا دست یابند. در مقاله‌ی حاضر به دنبال روشی هستیم که بوسیله آن جریان در بهینه‌ترین حالت خود از نظر پایداری قرار گیرد. امروزه از نظر تئوری و عملی تأیید شده است که استفاده از دیوار انعطاف‌پذیر، عبور جریان از آرام به درهم را می‌تواند به تعویق اندازد. لازم به ذکر است که دو نوع درگ فشاری و اصطکاکی در هنگام عبور جریان از روی جسم به وجود می‌آید که بطور بالقوه مولفه درگ فشاری بزرگتر است، مخصوصاً زمانی که جدایی جریان اتفاق می‌افتد. درگ فشاری ناشی از اختلاف فشار جلو و عقب جسم می‌باشد و نیرویی ایجاد می‌کند که جسم را به سمت عقب فشار می‌دهد. خط جریانی کردن اجسام باعث می‌شود که قسمت عمده درگ فشاری حذف گردد. درگ اصطکاکی ناشی از شرط مرزی عدم لغزش بر روی سطح است که در اثر تنش برشی لزج بر روی سطح ایجاد می‌گردد. اگر لایه مرزی تشکیل شده روی سطح آرام باشد مقدار درگ نسبتاً کمی خواهیم داشت. بنابراین نگهداری جریان در حالت آرام در رینولزهای بالا روش واضحی برای کاهش ضریب اصطکاک سطح خواهد بود.

لذا توانایی دیواره انعطاف‌پذیر در کاهش درگ اصطکاکی بیانگر افزایش سرعت جسم و بهبود راندمان انرژی است. از طرفی جریان آرام بر روی جسم باعث کاهش قابل ملاحظه‌ی انتشار نویز و در نتیجه مخفی تر بودن جسم غوطه ور می‌گردد. بنابراین دیواره‌های انعطاف‌پذیر می‌توانند در کاربردهای آکوستیک نیز مفید واقع شوند

پوشش انعطاف‌پذیر اولین بار توسط کرامر [۱] بمنظور کاهش پسا شبیه سازی شد (شکل ۱).



شکل ۱- مدل تئوری یک پوشش انعطاف‌پذیر

هدف از این بررسی، ارائه توجیهی برای سرعت بالای دلفین‌ها در شنا بود. در واقع کرامر، پوشش انعطاف‌پذیری طراحی کرد که خواص مکانیکی پوست دلفین را شبیه سازی کند. وی به این نتیجه رسید که پوشش انعطاف‌پذیر می‌تواند پسا را تا حدود ۶۰٪ نسبت به پوشش صلب کاهش دهد [۲]. البته بیشتر کارهای تئوری و آزمایشگاهی که توسط محققین بعدی انجام شد تناقض‌های زیادی را با نتایج کرامر نشان می‌دهند [۳-۵]. بعلاوه در تعداد قابل توجهی از تست‌ها، پوشش‌های انعطاف‌پذیر مشابه، پسای بالاتری را نسبت به سطح صلب نشان دادند [۶]. دلیل این تناقض، بوجود آمدن ناپایداری‌های سطحی القایی (FISI)، علاوه بر ناپایداری تولمین-

شیلخی‌تینگ (TSI²) است که در اثر حضور مرز قابل انعطاف بوجود می‌آیند. تئوری پایداری خطی لایه مرزی بلازیوس روی یک سطح انعطاف‌پذیر نشان داد که می‌توان با بکار بردن یک دیوار انعطاف‌پذیر مناسب، امواج تولمین-شیلخی‌تینگ را پایدار کرد. هرچند حضور چنین پوشش انعطاف‌پذیری باعث ایجاد موده‌های سطحی القایی می‌گردد ولی می‌توان با طراحی یک پوشش بهینه، پایداری را در جریان ایجاد کرد [۷].

بررسی تئوری معادلات حاکم

بدست آوردن معادله اور سامرفیلد³:

معادلات ناویراستوکس دو بعدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم که در آن‌ها علامت (*) علامت * نشان‌دهنده این است که متغیرها بعد دار هستند:

$$u_x^* + v_y^* = 0 \quad (1)$$

$$u_t^* + u^* u_x^* + v^* u_y^* + \frac{1}{\rho} p_x^* = \nu \Delta u^* \quad (2)$$

$$v_t^* + u^* v_x^* + v^* v_y^* + \frac{1}{\rho} p_y^* = \nu \Delta v^* \quad (3)$$

با تعریف متغیرهای جدید بصورت $u = \frac{u^*}{u_\infty}$ ، $v = \frac{v^*}{u_\infty}$ ، $p = \frac{p^*}{\rho u_\infty^2}$ ، $x = \frac{x^*}{L}$ ، $y = \frac{y^*}{L}$ و $t = \frac{t^* u_\infty}{L}$ جایگذاری در روابط (۱) تا (۳) به معادلات ناویراستوکس بی بعد به صورت زیر می‌رسیم:

$$u_x + v_y = 0 \quad (4)$$

$$u_t + uu_x + vv_y + p_x = \frac{1}{\text{Re}} \Delta u \quad (5)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = \frac{1}{\text{Re}} \Delta v \quad (6)$$

ترم‌های اغتشاشی را به صورت زیر به میدان‌های سرعت و فشار اعمال می‌کنیم:

$$u(x, y, t) = U(y) + \varepsilon \hat{u}(x, y, t) \quad (7)$$

$$v(x, y, t) = 0 + \varepsilon \hat{v}(x, y, t) \quad (8)$$

$$p(x, y, t) = p(x) + \varepsilon \hat{p}(x, y, t) \quad (9)$$

با قرار دادن میدان‌های سرعت و فشار در معادلات ناویراستوکس و حذف ترم‌های $O(\varepsilon^2)$ و کوچکتر خواهیم داشت:

$$\hat{u}_t + U \hat{u}_x + \hat{v} U_y + p_x - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \hat{u} = 0 \quad (10)$$

²Tollmien-Schlichting Instabilities

³-orr-sommerfeld

$$\hat{v}_t + U \hat{v}_x + p_y - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \hat{v} = 0 \quad (11)$$

$$\hat{u}_x + \hat{v}_y = 0 \quad (12)$$

حال اغتشاشات را به صورت موج‌های گذرای یکبندی که دامنه آنها در جهت y است، در نظر می‌گیریم:

$$\hat{u}(x, y, t) = \text{Re} \left(\tilde{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \quad (13)$$

$$\hat{v}(x, y, t) = \text{Re} \left(\tilde{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \quad (14)$$

$$\hat{p}(x, y, t) = \text{Re} \left(\tilde{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \quad (15)$$

که در آن α عدد موج و $\omega = \alpha c$ فرکانس موج و $\lambda = -i\omega = -i\alpha c$ یک عدد مختلط و ضریب زمان است و قسمت حقیقی آن سرعت رشد زمانی دامنه اغتشاشات را نشان می‌دهد. با جایگذاری موج‌های اغتشاشی در (۱۰) تا (۱۲) داریم:

$$i\alpha \tilde{u} + \tilde{v}_y = 0 \quad (16)$$

$$-i\omega \tilde{u} + U i \alpha \tilde{u} + U_y \tilde{v} + i \alpha \tilde{p} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \tilde{u} \quad (17)$$

$$-i\omega \tilde{v} + U i \alpha \tilde{v} + \tilde{p}_y = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right) \tilde{v} \quad (18)$$

از رابطه (۱۶)، \tilde{u} را بر حسب \tilde{v} در رابطه (۱۷) جایگذاری کرده و نسبت به y مشتق می‌گیریم و \tilde{p}_y را بدست آورده و در رابطه (۱۸) جایگذاری کرده و پس از ساده سازی به رابطه (۱۹) می‌رسیم:

$$\frac{1}{\text{Re}} (\phi'''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) - i(\alpha U - \omega)(\phi'' - \alpha^2 \phi) + i\alpha U' \phi = 0 \quad (19)$$

که یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) مرتبه ۴ است که به آن معادله اورسامرفیلد می‌گویند. مقادیر ویژه این معادله، پایداری جریان پایه را تعیین می‌کند. بنابراین برای بررسی پایداری جریان در مسئله مورد نظر باید ابتدا جریان پایه و شرایط مرزی متناسب با مسئله بدست آید و سپس معادله اورسامرفیلد با این شرایط مرزی بصورت عددی حل گردد.

برای حل عددی معادله اورسامرفیلد باید آن را به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بصورت رابطه (۲۰) تبدیل کرد:

$$U_y = AU \quad (20)$$

که در رابطه (۲۰) جملات به صورت زیر هستند:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \\ \phi'' - \alpha^2 \phi \\ \phi''' - \alpha^2 \phi' \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$A(y, p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i\alpha \operatorname{Re} U''(y) & 0 & \gamma(y) & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\gamma(y) = \lambda \operatorname{Re} + \alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re} U(y) \quad (23)$$

جریان پایه

برای حل معادله اورسامرفیلد حاکم بر مسئله نیاز به دانستن $u(y)$ در جریان پایه است. برای این منظور از حل تشابهی بلازیوس استفاده می‌کنیم. در این روش $u(y) = f'(y)$ در نظر گرفته می‌شود که $f(y)$ تابع بلازیوس است و معادله زیر را با شرایط مرزی داده شده ارضاء می‌کند:

$$f''' + \frac{1}{2} ff'' = 0 \quad (24)$$

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 0 \\ f'(y) \rightarrow 0 \text{ as } y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (25)$$

این معادله، یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) مرتبه ۳ است که برای حل آن می‌توان از روش عددی رانگ کوتا (RK) استفاده کرد. بنابراین با این روش می‌توان جریان پایه مسئله مورد نظر را بدست آورد.

شرایط مرزی

بدلیل اینکه معادله اورسامرفیلد یک معادله مرتبه ۴ است برای حل این معادله نیاز به ۴ شرط مرزی داریم که دو شرط مرزی در بینهایت ($y \rightarrow \infty$) و دو شرط مرزی روی سطح انعطاف پذیر است.

شرایط مرزی در بینهایت

شرایط مرزی در بینهایت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} u(y) \rightarrow 1 \\ u''(y) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ as } y \rightarrow \infty$$

با قرار دادن این شرایط در دستگاه معادلات مرتبه اول اورسامرفیلد (۲۰)، ماتریس A بصورت رابطه (۲۶) ساده می‌شود:

$$A(\alpha, c, R_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

که یک ماتریس با مؤلفه‌های ثابت است و در آن $\beta^2 = \lambda \text{Re} + \alpha^2 + i\alpha \text{Re}$ است. بنابراین شرایط مرزی در بینهایت بصورت زیر خواهد بود:

$$\phi''' + \alpha \phi'' - \beta^2 \phi' - \beta^2 \alpha \phi = 0 \quad (27)$$

$$\phi''' + \beta \phi'' - \alpha^2 \phi' - \alpha^2 \beta \phi = 0 \quad (28)$$

شرایط مرزی روی سطح انعطاف پذیر

در کار ارائه شده، سطح انعطاف پذیر نوع کرامر⁴ که یک مدل ساده صفحه و فنر است مورد بررسی قرار گرفته است. در این نوع سطح، صفحه الاستیکی بر روی ردیفی از فنرها که به دیواره صلبی متصل هستند قرار می‌گیرد. همچنین می‌توان با یک سیال لزج نیز این صفحه را پشتیبانی کرد که به صورت شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده است.

بدین ترتیب ما یک سطح انعطاف پذیر ایزوتروپ خواهیم داشت که قابلیت جابجایی در جهت y را دارد در حالیکه نمی‌تواند در جهت x جابجا شود. جابجایی دیوار انعطاف پذیر را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$W(x, t) = \delta W_0 e^{i\alpha x + \lambda t} \quad (29)$$

که در رابطه اخیر α عدد موج در جهت جریان و δ ضخامت لایه مرزی و $\lambda = -i\alpha c$ توان پایداری با سرعت موج مختلط c **not defined**. و W_0 دامنه بی بعد جابجایی صفحه است. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت دیوار انعطاف پذیر بصورت زیر است:

$$\rho_m b \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + d \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_E W = \delta p_s - \delta p_e \quad (30)$$

که در رابطه فوق $K_E = k - g(\rho_e - \rho_s)$ ترم مدل کننده سفتی فنر است و k نشاندهنده ضریب فنر و ρ_e و ρ_s به ترتیب نشاندهنده چگالی سیال و چگالی لایه لزج است. B **not defined**. سختی موجی صفحه و T تنش عمودی و d ضریب میرایی و b **not defined**.

⁴-keramer

ضخامت صفحه است. δp_e و δp_s به ترتیب نشاندهنده اغتشاشات فشار ناشی از سیال و لایه لزج بر روی صفحه است و ρ_m چگالی صفحه می‌باشند.

با قرار دادن شکل جابجایی سطح در معادله (۳۰) و جایگذاری مدل اغتشاشات فشار به صورت $\bar{w} = \frac{W}{\delta}$ است، معادله حاکم بر حرکت دیواره قابل انعطاف برابر است با:

$$-\bar{\alpha}^2 \bar{c}^2 C_m - i \bar{\alpha} \bar{c} C_D + \bar{\alpha}^4 C_B + \bar{\alpha}^2 C_T + C_{KE} = \hat{p}_s - \hat{p}_e \quad (31)$$

که در رابطه فوق ضرائب بی بعد، که نشان دهنده مشخصات مکانیکی پوشش هستند به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$C_m = \frac{b \rho_m}{\rho_e \delta}, \quad C_D = \frac{d}{\rho_e U_\infty}, \quad C_B = \frac{B}{\rho_e \delta^3 U_\infty^2} \quad (32)$$

$$, \quad C_T = \frac{T}{\rho_e \delta U_\infty^2}, \quad C_{KE} = \frac{k_E \delta}{\rho_e U_\infty^2}$$

حال به بررسی شرایط مرزی بر روی سطح انعطاف پذیر می‌پردازیم.

شرط مرزی سینماتیکی

چنانچه ξ Error! Bookmark not defined. و η Error! Bookmark not defined. مختصات جدید سطح تغییر شکل یافته سطح انعطاف پذیر باشند که به ترتیب در راستای x Error! Bookmark not defined. و y Error! Bookmark not defined. صفحه مختصات هستند، آنگاه سرعت سطح عبارت خواهد بود از:

$$\xi_t = u(x_0 + \xi, y_0 + \eta, t) \quad (33)$$

$$\eta_t = v(x_0 + \xi, y_0 + \eta, t)$$

که در آن $y_0 = 0$ است. با بسط تیلور روابط بالا و حذف ترم‌های مرتبه بالاتر از ۱ و فرض $\xi_t \approx 0$ و $\xi \approx 0$ به روابط (۳۴) و (۳۵) می‌رسیم:

$$0 = \hat{u}(x, 0, t) + U_y(0)\eta \quad (34)$$

$$\eta_t = \hat{v}(x, 0, t) \quad (35)$$

حال با وارد کردن اغتشاشات به فرم نمایی و استفاده از رابطه پیوستگی، شرط مرزی سینماتیکی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$c \phi_y + U_y(0)\phi = 0 \quad (36)$$

که در رابطه اخیر $U_y(0) = 0.3320573371$ است که از حل تشابهی جریان پایه بدست می‌آید.

شرط مرزی دینامیکی

چنانچه از معادله (۱۷) و با استفاده از معادله (۱۶)، دامنه اغتشاشات فشاری را بر حسب \tilde{v} بدست آوریم با در نظر گرفتن $\tilde{v} = \phi$ خواهیم داشت:

$$i\alpha \tilde{p} = \frac{1}{\alpha} (U\alpha - \omega)\phi' - U_y \phi + \frac{i}{\alpha \text{Re}} (\phi''' - \alpha^2 \phi') \quad (37)$$

حال با استفاده از شرط سینماتیکی و دانستن اینکه $\frac{\omega}{\alpha} = c$ می توان نشان داد که:

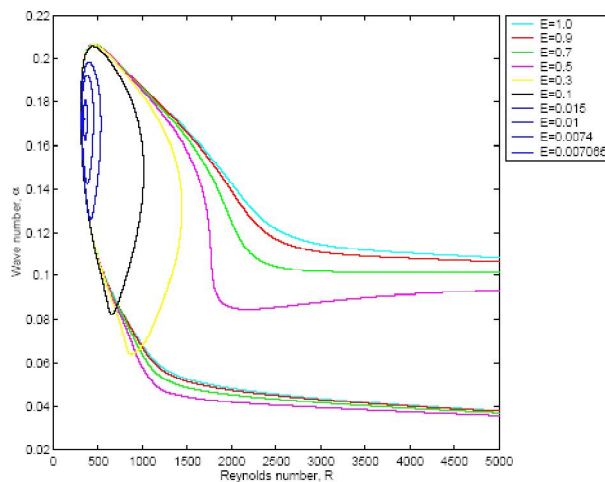
$$i\alpha p_e = \frac{i}{\alpha \text{Re}} (\phi'''(0) - \alpha^2 \phi'(0)) \quad (38)$$

با فرض اینکه لایه لزج نداریم ($p_s = 0$) و با جایگذاری روابط بالا در معادله (۳۱) شرط مرزی دینامیکی بصورت رابطه (۲۹) خواهد بود:

$$ic(\phi'''(0) - \alpha^2 \phi'(0)) + \alpha \text{Re}(\alpha^2 c^2 C_m + i\alpha c C_D - \alpha^4 C_B - \alpha^2 C_T - C_{KE})\phi(0) = 0 \quad (39)$$

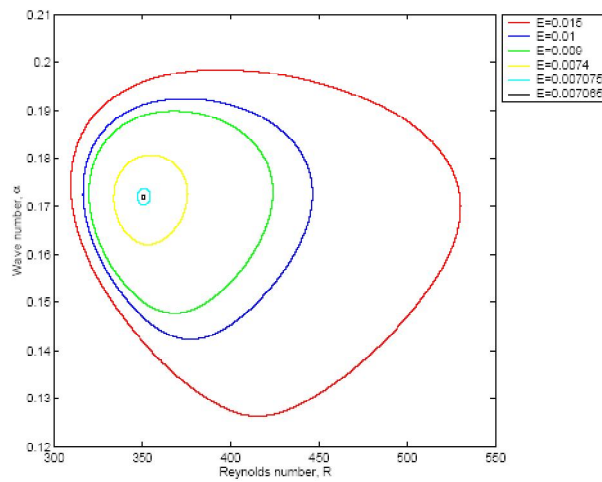
ارائه و تحلیل نتایج

با در نظر گرفتن $I_m(c) = 0$ ، معادله اورسامرفیلد بدست آمده را می توان برای **Error! Bookmark not defined**، E **Error! Bookmark not defined**، R_e و R_e **defined**، مختلف حل نمود که نمودار آن در شکل (۲) ارائه شده است. بقیه پارامترها را ثابت در نظر گرفته و C_D و C_T را صفر قرار می دهیم. داخل منحنیناحیه ناپایدار و بیرون آن ناحیه پایدار را نشان می دهد.



شکل ۲- اثر E بر منحنی پایداری خنثی

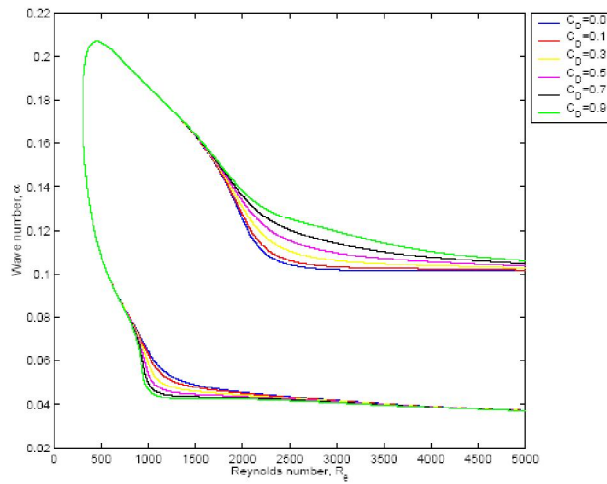
هنگامیکه E خیلی بزرگ است منحنی به منحنی خنثی لایه مرزی بلازیوس روی دیوار صلب تبدیل می‌شود. اثر تغییرات E به وضوح نشان می‌دهد که با کاهش E ناحیه ناپایداری کوچکتر می‌شود و منحنی‌های خنثی مدل صفحه/فنر نسبت به منحنی سطح صلب به سمت پائین و راست جابجا می‌شوند. کاهش E متناظر با کاهش سختی فنر (k) و صلبیت موجی صفحه (B) است. بنابراین سختی فنر مشخصه‌های ناپایداری در رینولدزهای بالا را تعیین می‌کند. شکل (۳) بزرگ شده‌ناحیه‌نزدیک دماغه است و در آن E به 0.007065 نزدیک می‌شود که نقطه بحرانی است و ناحیه ناپایداری به یک نقطه تبدیل می‌شود.



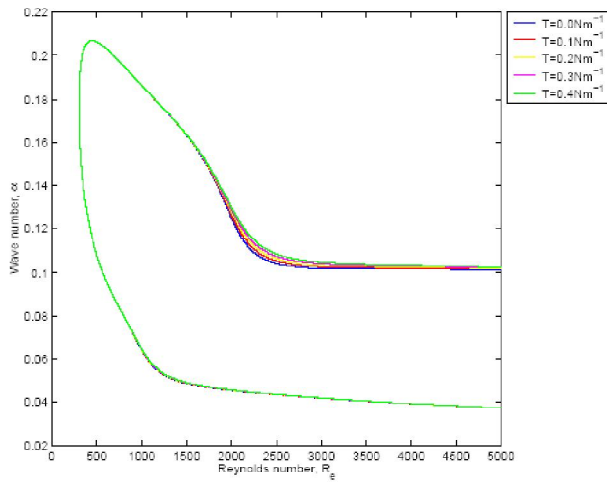
شکل ۳- بزرگ شده دماغه منحنی پایداری خنثی در نزدیکی نقطه بحرانی

نقطه بحرانی به این دلیل اهمیت پیدا می‌کند که جریان برای $E < E_c$ فوق العاده پایدار است و اعداد رینولدز ناحیه گذار بطور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. این اثر نشان می‌دهد که استفاده از سطوح انعطاف‌پذیر می‌تواند درگ را با به تأخیر انداختن ناحیه گذار کاهش دهد.

شکل‌های (۴) و (۵) و اثرات تغییرات تنش و میرایی را نشان می‌دهند. نتایج نشان می‌دهند که میرایی اثر قابل توجهی روی عدد رینولدز مینیمم ناپایداری ندارد ولی در شکل ناحیه ناپایداری نسبتاً اثر گذار است. همچنین اثر غیر صفر بودن نشان می‌دهد که تنش غیر صفر، اثر مهمی بر مشخصه‌های ناپایداری لایه مرزی دیوار انعطاف‌پذیر نمی‌گذارد.



شکل ۴- اثر میرایی سطح انعطاف پذیر بر منحنی پایداری خنثی



شکل ۵- اثر تغییرات ضریب تنش بر منحنی پایداری خنثی

مراجع

[1] Kramer, M. O., The dolphin's secret, New Sci. 1960.

[2] Kramer, M. O., The Hydrodynamics of the dolphin, Adv. Hydrosci. 1965.

[3] V. kumaran, "Classification of instabilities in the flow past flexible surfaces" Current Science, Vol, 79, No. 6 (2000) 766-773.

[4] P. W. Carpenter and C. Davies and A. D. Lucey, "Hydrodynamics and compliant walls: Does the dolphin have a secret?" Current Science, Vol, 79, No. 6 (2000) 758-765.

[5] N. Bane jee and P. Jayakumar, "Compliant Materials for Drag Reduction of High-speed Submerged Bodies" Defence Science Journal, Vol. 55, No. 1 (2005) 37-42.

[6] V.D. DJORDJEVIĆ, "On The Fluid Flow Over A Compliant Wall" *Mechanics, Automatic Control and Robotics* Vol.2, No 10, 2000 pp. 1219 – 1232.

[7] P.G. Drazin and W.H. Reid, "Hydrodynamic Stability" Cambridge University Press, (1981)