

## بررسی ناپایداری و شکل الگوهای جریان سلولی مسئله ریلی - بنارد

محمدجواد وفایی رستمی<sup>۱</sup>، سینا حاجی طاهری<sup>۲</sup> و احمد صداقت<sup>۳</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

E-mail: (Sedaghat@cc.iut.ac.ir)

### چکیده

در بسیاری از پروسه های صنعتی، انتقال حرارت از یک لایه سیال و ناپایداری حرکتی سیال در طراحی پروسه و کیفیت فرایند حائز اهمیت است. مسئله ناپایداری لایه ای از سیال که از زیر حرارت می بیند به مسئله ریلی- بنارد معروف است. در بررسی های اولیه عامل اصلی ناپایداری نیروی شناوری ذرات گرم بالا رونده و نیروی گرانش ذرات سردتر پائین رونده تشخیص داده شدند. ولی آزمایشات بعدی توسط ماراگونی برای لایه های نازکی از سیال، عامل اصلی ناپایداری را گرادیان در کشش سطحی دانست. در این مقاله، ابتدا معادلات ناویر استوکس با استفاده از تخمین بوزینسک، ساده شده و سپس معادلات خطی شده پایداری، بدست می آیند. با تعریف موده های نرمال و اعمال شرایط مرزی برای حالت های دو مرز آزاد، دو مرز صلب، و یک مرز آزاد-یک مرز صلب، جواب های معادلات پایداری بدست آمدند و عدد موج بی بعد بحرانی و عدد ریلی بحرانی، دقیقاً محاسبه شدند. نمودارهای عدد ریلی بر حسب عدد موج بی بعد و الگوهای جریان سلولی بررسی شده و با یافته های تجربی مقایسه شده اند.

واژه های کلیدی: ناپایداری هیدرو دینامیکی - مسئله ریلی - بنارد - جریان های سلولی.

### مقدمه

ماراگونی (Marangoni) در سال ۱۹۶۰ گونه دیگری از آزمایشات را برای لایه نازکی از سیال انجام داد و مشاهده کرد که مکانیزم دیگری ناشی از گرادیان در برش سطحی باعث ناپایداری می شود [۳]. بعدها روشن شد که اکثر یافته های بنارد ناشی از مکانیزم ناپایداری از نوع اخیر بوده است. از طرفی وی دریافت که ناپایداری ناشی از برش سطحی با ضخامت لایه سیال متناسب بوده و هرچه لایه سیال ضخیم تر شود، ناپایداری ناشی از برش سطحی کاهش می یابد. در سال های اخیر نیز گانتون (Gunton) و دیگران با استفاده از سوپر کامپیوترها توانستند جابجایی ریلی-بنارد را شبیه سازی کنند و به کمک آن الگوهای بی نظمی غیر قابل پیش بینی را آشکار سازند [۴، ۷].

موضوع انتقال حرارت جابجایی اولین بار توسط تامسون (Thompson) در سال ۱۷۹۰ با بررسی انتقال حرارت از کلوچه سیبی مطرح شد [۱]. در سال ۱۹۰۰ بررسی های سیستماتیک برای حالتی که سیال از زیر توسط سطح صلبی گرم می شد و در بالا در معرض هوا قرار داشت، توسط بنارد صورت گرفت که در این حالت مورد بررسی، سطح بالایی سیال برای حرکت و تغییر شکل سیال می توانست آزادانه عمل کند [۲]. ریلی (Rayleigh) در سال ۱۹۱۶ تئوری اش را برای شرایط ناپایداری در حالت دو سطح صلب ارائه کرد [۲]. او نشان داد که ناپایداری وقتی رخ می دهد که  $\beta = -dT/dZ$  به اندازه کافی بزرگ شود و بر مبنای آن عدد بی بعد ریلی ( $R_a$ ) را تعریف کرد.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد

<sup>۳</sup> استادیار

## طبیعت مسئله

مسئله جابجایی ریلی-بنارد، بررسی ناپایداری یک لایه از سیال می باشد که بین دو صفحه رسانای گرمایی، قرار گرفته و از زیر گرم می شود تا یک گرادیان دمایی ثابت تولید شود. بدلیل آنکه مایعات دارای ضریب انبساط حرارتی مثبت می باشند، گرادیان دمایی عمودی باعث ایجاد گرادیان چگالی می شود و مایع داغ در لایه های زیرین منبسط شده و نیروی شناوری، عامل ناپایدار کنندگی می گردد. همچنین سیال سردتر (و سنگین تر) تحت انرژی گرانشی به سمت پایین حرکت در می آید. از طرفی لزجت سیال، رفتار آنرا برای گرادیان های کوچک دما پایدار کرده و آنرا در حالت سکون نگه می دارد. بنابراین نحوه انتقال حرارت در سیستم بصورت هدایت خواهد بود. به عبارت دیگر، در صورتی که گرادیان چگالی به اندازه کافی بزرگ باشد، سیال حرکت خواهد کرد.

بنارد آزمایشهای خود را بر روی لایه های بسیار نازک از سیال به عمق حدود یک میلی متر و یا کمتر که روی یک صفحه فلزی که در وضعیت تراز قرار داشت، انجام داد. صفحه فلزی در یک دمایی ثابت نگهداشته می شد. سطح بالا آزاد و در تماس با هوای با دمایی پائین تر (محیط) بود (شکل ۱). بنارد آزمایش های خود را با مایعات مختلف که خواص فیزیکی متفاوتی داشتند، انجام داد. در ضمن، او قصد داشت تا نقش لزجت را نیز بدقت بررسی کند. بنابراین از مایعات با لزجت بالا مانند پارافین و روغن (spermaceti) استفاده کرد. در همه آنها بنارد پی برد زمانیکه دمایی سطح پایین به کندی افزایش می یابد، در یک لحظه مشخص، لایه سیال پاره شده و شبکه های سلولی تشکیل می شوند. همچنین او مشاهده کرد که حرکت های داخل سلولها، بصورت صعود در مرکز و نزول در مرزها با سلول های مجاور صورت می گیرد.

بنارد دو فاز را در توسعه الگوهای سلولی تشخیص داد [۵]:

- **فاز اولیه:** در فاصله کوتاهی، سلولها به درجه مناسبی از نظم می رسند و شکل چند گوشه های مقعر ۴ تا ۶ وجهی با دیوارهای عمودی را پیدا می کنند.
- **فاز ثانویه:** سلولها به شکل شش وجهی های هم اندازه و بطور منظم تشکیل شده و در مدت زمان نسبتاً طولانی باقی می مانند.

بنارد خیلی علاقمند بود تا شکل گیری فاز دوم را همراه با حرکت های متناظر با آن مشاهده کند، اما ضعف او این بود که نسبت به شرایط لازم برای شروع ناپایداری آگاهی کافی نداشت. همچنین بنارد در مقالات اولیه اش، بیشتر به مساله تنش برشی سطحی توجه می کرد.

## الگوهای جابجایی

الگوهای جابجایی مشاهده شده در توپوگرافی جابجایی، رولهای موازی و شش وجهی ها هستند (شکل ۲). پارامترهای اولیه سیال و نوع آن، نمونه الگوی تشکیل شده را تعیین می کند. این الگوها پایدار بوده و دچار هیچ بی نظمی و هرج و مرجی نیز نیستند. این اشکال برای همیشه ساختار خود را حفظ می کنند (اگر تحت یک دمایی ثابت نگهداشته شوند).

## الگوهای حلزونی بی نظمی

اخیراً گانتون و همکارانشان [۴] با استفاده از سوپر کامپیوتر Cray-C90 شروع جابجایی را از حالت اولیه (سکون سیال) بصورت یک الگوی ملون از حلزونی های موضعی نشان دادند (شکل ۳). حلزونی ها نه تنها می چرخند، بلکه به سمت پیرامون سیال حرکت کرده و با برخورد همدیگر را حذف می کنند و در اندازه و تعداد متفاوت تشکیل می شوند. بعضی از اجزاء سیال سریعتر از بقیه، بالا و پایین می روند. سرعت ها و دماها و بطور کلی هر کمیتی در سیستم به طریقی غیر قابل پیش بینی تغییر می کند.

## معادلات حرکت

سیال به ضخامت  $d$  که دارای بعد افقی بینهایت است را در نظر بگیرید. دما در بالا  $T_u$  و در پایین لایه  $T_b$  می باشد.

معادلات حرکت به شکل تانسور عبارتند از:

- معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

که  $\rho$  دانسیته سیال،  $x_j = (x, y, z)$  و  $u_j = (u, v, w)$  است.

$$\frac{|\delta\rho|}{\rho_b} = \frac{|\rho - \rho_b|}{\rho_b} = \alpha |T - T_b| \ll 1 \quad (7)$$

اما ترم شناوری  $g(\rho - \rho_b)$  در معادله ممنتوم، غیر قابل اغماض است. از آنجاییکه تغییرات چگالی از مرتبه  $\alpha$  بوده که دارای مقدار کوچکی است، معادله پیوستگی به معادله پیوستگی برای جریان تراکم ناپذیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8)$$

در نتیجه تانسور تنش به شکل زیر ساده می شود:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (9)$$

و معادله مومنتوم به شکل زیر خلاصه می شود:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -g\rho_b [1 - \alpha(T - T_b)]\delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i \quad (10)$$

که با استفاده از تخمین بوزینسک داریم:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_b} + gz \right) - \alpha g(T - T_b)\delta_{i3} + \nu \Delta u_i \quad (11)$$

که  $\Delta = \partial^2 / \partial x_j^2$  اپراتور لاپلاسین است.

در معادله انرژی (۴)، با فرض ثابت بودن  $c_v$  و  $k$  و با صرفنظر کردن از ترم  $-p \operatorname{div} \mathbf{u}$  و با توجه به معادله پیوستگی، ترم دوم استهلاک لزجی  $\Phi$  در معادله (۵) حذف می شود. علاوه بر این به کمک معادله ممنتوم و معادله (۶) می توان نشان داد که سرعتها از مرتبه  $[\alpha \Delta T |X| d]^{1/2}$  بوده و بنابراین استهلاک لزجی  $\Phi$  از مرتبه  $\mu \alpha |X| d / k$  و قابل صرفنظر کردن است. تحت این شرایط معادله انرژی به شکل زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \Delta T \quad (12)$$

که برای گاز کامل  $\kappa = k / \rho_b c_p$  و برای مایعات  $\kappa = k / \rho_b c_v$  است.

- معادله مومنتوم

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -g\rho\delta_{i3} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

که تانسور تنش  $\tau_{ij}$  عبارتست از:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (3)$$

و  $\mu$  لزجت سیال و  $p$  فشار ترمودینامیکی است.

- معادله انرژی

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} (c_v T) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (c_v T) \right) = \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \Phi$$

که  $c_v$  گرمای ویژه در حجم ثابت است. همچنین  $k$  ضریب هدایت حرارتی و  $T$  دما می باشد. از طرفی ترم استهلاکی لزجی  $\Phi$  عبارت است از:

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]^2 - \frac{2}{3} \mu \left[ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]^2 \quad (5)$$

تخمین بوزینسک

بوزینسک، برای جریانهایی که گرادیان دمایی کوچکی دارند و در نتیجه دارای تغییرات چگالی ناچیز نسبت به دما هستند، چگالی را در همه جا ثابت فرض کرد (بجز در ترم شناوری). اگر  $\rho_b$  چگالی سیال در لایه زیرین و در دمای  $T_b$  باشد، آنگاه برای اختلاف دمایی کوچک بین لایه بالا و لایه پایین سیال داریم:

$$\rho = \rho_b [1 - \alpha(T - T_b)] \quad (6)$$

که  $\alpha$  ثابت انبساط حجمی است. برای مایعات،  $\alpha$  در رنج  $10^{-4}$  تا  $10^{-3}$  می باشد. در نتیجه برای یک تغییر دمایی کوچک:

### جریان اولیه (بدون اختلال)

در حالت اولیه پایدار سیال،  $U_0 = 0$  و توزیع فشار  $P_0(z)$  و توزیع دما  $T_0(z)$  می باشند و از معادلات انرژی و ممنتوم داریم:

$$\frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{P_0}{\rho_b} + gz \right) - \alpha g (T_0 - T_b) = 0$$

که از حل معادلات فوق خواهیم داشت::

$$U_0 = 0 \quad (14)$$

$$T_0(z) = T_b - \beta z$$

$$P_0(z) = p_b - g \rho_b \left( z + \alpha \beta z^2 / 2 \right)$$

که  $\beta = (T_b - T_w) / d$  گرادیان دمای مبنا می باشد.

### معادلات خطی شده پایداری

برای بررسی پایداری، ترمهای اختلالی زیر در معادلات حرکت بوزینسک جایگذاری می شوند:

$$u = \varepsilon u'(x, y, z, t)$$

$$T = T_0(z) + \varepsilon \theta'(x, y, z, t) \quad (15)$$

$$p = P_0(z) + \varepsilon p'(x, y, z, t)$$

که  $\varepsilon \ll 1$  ثابت اختلالی بوده و با صرفنظر کردن از ترمهای اختلالی مرتبه ۲ و بالاتر در معادلات حرکت، به معادلات خطی شده زیر می رسیم:

$$\nabla \cdot u' = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_b} \nabla p' + \alpha g \theta' \hat{k} + \nu \Delta u' \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - \beta w' = \kappa \Delta \theta'$$

معادلات فوق بصورت بدون بعد زیر ساده می شوند:

$$\nabla \cdot u' = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\nabla p' + R_a P_r \theta' \hat{k} + P_r \Delta u' \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} - w' = \Delta \theta'$$

که  $R_a$  و  $P_r$  اعداد بدون بعد ریلی و پرائتل هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$R_a = \frac{g \alpha \beta d^4}{\kappa \nu}, P_r = \frac{\nu}{k} \quad (18)$$

با حذف ترم فشار از معادلات (۱۷) به دو معادله زیر برای سرعت قائم  $w'$  و دما  $\theta'$  می رسیم:

$$\left( \frac{1}{P_r} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w' = R_a \Delta_1 \theta' \quad (19)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \theta' = w'$$

که  $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  لاپلاسیان افقی است. با حذف  $\theta'$

از معادلات فوق به معادله زیر برای مولفه سرعت قائم می رسیم:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \left( \frac{1}{P_r} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta w' = R_a \Delta_1 w' \quad (20)$$

اگر  $w'$  را از معادله (۱۹) حذف کنیم، به معادله ای مشابه فوق برای  $\theta'$  می رسیم.

### مودهای نرمال

ریلی، مودهای نرمال را به شکل زیر برای تحلیل پایداری معرفی کرد:

$$w'(x, y, z, t) = W(z) f(x, y) e^{\sigma t} \quad (21)$$

$$\theta'(x, y, z, t) = \Theta(z) f(x, y) e^{\sigma t}$$

با توجه به این نکته که تابع شکل  $f(x, y)$  باید معادله زیر را ارضاء کند:

$$\Delta f + a^2 f = 0 \quad (22)$$

که  $a$  عدد موج افقی نامیده می شود و با جایگذاری عبارات (۲۱) در معادلات ترمهای اختلالی (۱۹) و (۲۰) به ترتیب داریم:

$$(D^2 - a^2 - \sigma) \Theta = -W$$

$$(D^2 - a^2) \left( D^2 - a^2 - \frac{\sigma}{P_r} \right) W = a^2 R_a \Theta \quad (23)$$

عدد ریلی بحرانی  $R_{ac}$  از رابطه فوق و برای کمترین مقدار  $n = 1$  بدست می آید. عدد موج بحرانی با صفر قرار دادن  $dR_a/da^2$  برابر  $a_c = \pi/\sqrt{2}$  بدست می آید که با جایگذاری در رابطه (۲۹) مقدار ریلی بحرانی  $R_{ac} = 27/4\pi^4$  حاصل می شود.

### مرزهای صلب - صلب

در این حالت از مسئله، با در نظر گرفتن معادله (۲۷) شرط مرزی (۲۶) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$W = DW = (D^2 - a^2)^3 W = 0 \quad (rigid) \quad (30)$$

در این شرایط جواب دو حالت مجزا می تواند داشته باشد: (۱) مود زوج - سرعت عمودی نسبت به صفحه وسط، تقارن دارد و (۲) مود فرد - سرعت عمودی غیر متقارن است. برای مود زوج، یک ردیف از سلولها در امتداد عمودی تشکیل می شوند در حالیکه برای مود فرد، دو ردیف از سلولها در امتداد عمودی شکل می گیرند. همچنین به دلیل وجود تقارن، محور  $z$  ها را به مرکز لایه منتقل می کنیم. جواب (۲۷) با استفاده از شرایط مرزی (۳۰) به شکل کلی

$$W = e^{\pm qz}, \quad (z = \pm \frac{1}{2}) \quad (31)$$

در نظر گرفته می شود که با جایگذاری در (۲۷)، معادله ای برای ریشه های  $q$  به صورت زیر بدست می آید:

$$(q^2 - a^2)^3 = -a^2 R_a \quad (32)$$

و با در نظر گرفتن  $a^2 R_a = \lambda^3 a^6$ ، جواب ریشه های معادله فوق عبارتند از:

$$q^2 = a^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \lambda \left( 1 \pm i \sqrt{3} \right) \right] \quad (33)$$

بنابراین کل ریشه ها  $\pm q_0, \pm q, \pm q^*$  به شکل زیر خواهند بود:

$$q_0 = a\sqrt{\lambda - 1}$$

$$q_1 = \text{Re}(q) = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \right) \right]^{1/2} \quad (34)$$

$$q_2 = \text{Im}(q) = a \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda \right) \right]^{1/2}$$

و  $q^*$  مزدوج مختلط  $q$  است. بر حسب مقادیر ریشه ها، جواب معادله اختلالی به دو صورت جوابهای زوج و جوابهای فرد خواهند بود که در زیر تشریح می شوند.

$$\begin{aligned} & (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma) \\ & \left( D^2 - a^2 - \frac{\sigma}{P_r} \right) W = -a^2 R_a W \end{aligned} \quad (24)$$

که  $D = d/dz$  است.

شرایط مرزی زیر برای حل معادلات (۲۳) در  $(z = 0, 1)$  اعمال می شوند:

$$W = DW = \Theta = 0 \quad (rigid) \quad (25)$$

$$W = D^2 W = \Theta = 0 \quad (free)$$

برای معادله (۲۴) شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$W = DW = D^4 W - \left( 2a^2 + \frac{\sigma}{P_r} \right) D^2 W = 0 \quad (rigid) \quad (26)$$

$$W = D^2 W = D^4 W = 0 \quad (free)$$

ترم  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$  که تابعی برحسب  $R_a$  و  $P_r$  است را در نظر بگیرید. اگر  $\sigma_r > 0$  جریان برای هر عدد موج  $a$  ناپایدار است و اگر  $\sigma_r \leq 0$  جریان برای تمام مودها پایدار است. مقدار بحرانی  $R_{ac}$  به وسیله  $\sigma = 0$  مشخص می شود. اکنون معادلات (۲۳) و (۲۴) را برای سه شرط مرزی مختلف حل می کنیم.

### نتایج و نتیجه گیری

#### مرزهای آزاد - آزاد

برای تحلیل پایداری و محاسبه مقدار بحرانی  $R_{ac}$ ، معادله (۲۴) با  $\sigma = 0$  برابر می شود با:

$$(D^2 - a^2)^3 W = -a^2 R_a W \quad (27)$$

که با توجه به شرایط مرزی (۲۶)، جواب زیر در نظر گرفته می شود:

$$W = A \sin(n\pi z) \quad (28)$$

که  $A$  یک عدد ثابت و  $n$  یک عدد صحیح است. با جایگذاری  $W$  در معادله (۲۷) رابطه مشخصه زیر حاصل می شود:

$$R_a = \left( n^2 \pi^2 + a^2 \right)^3 / a^2 \quad (29)$$

## جواب زوج

با حل عددی معادله فوق، توزیع عدد ریلی  $R_a$  بر حسب عدد موج  $a$  بدست آمده و در نمودار (۵) ترسیم شده است. مقدار بحرانی عدد ریلی و عدد موج مربوطه در مرجع [۵] برابرند با:

$$a_C = 5.365, \quad R_{aC} = 17610.3 \quad (41)$$

که با نتایج عددی حاصل از این پژوهش ( $a_C = 5.399, R_{aC} = 17611.46$ ) همخوانی دارد. با توجه به اینکه عدد ریلی بحرانی بدست آمده از جواب زوج، کوچکتر از عدد حاصل از جواب فرد می باشد، بنابراین جواب مورد قبول "جواب زوج" می باشد که منطبق با واقعیت فیزیکی مسئله نیز است.

## مرز آزاد - صلب

جواب برای این مورد زمانیکه سطح بالایی آزاد و سطح پایین صلب است، می تواند از جواب فرد مورد صلب - صلب ایجاد شود. مطابق آن جواب فرد برای مرز صلب - صلب در عمق  $d$  جوابی برای مرز صلب - آزاد برای عمق  $d/2$  به وجود می آورد. بدین وسیله با استفاده از نتایج پایداری از مورد صلب - صلب می توان نتیجه گرفت:

$$a_C = 5.399/2 \approx 2.6995, \quad R_{aC} = 17611.46/2^4 \approx 1100.72 \quad (42)$$

عدد ریلی بحرانی محاسبه شده از مقدارش برای مسئله دو مرز آزاد بیشتر و از مقدار ریلی بحرانی برای مسئله با دو مرز صلب کمتر است.

## الگوهای سلولی

مشاهده می شود که در شروع ناپایداری، اختلالاتی که در سیال آشکار می شوند، ناشی از عدد موج مشخصی هستند. با این وجود، الگویی که جایجایی سلولها ارائه خواهند کرد بطور پیچیده ای، غیر مشخص است و این یعنی اینکه برای بردار موج  $a$  به بی نهایت روش می توان دو مولفه عمود بر هم تعریف کرد که می توانند با فازها و دامنه های متعددی با هم ترکیب شوند.

بنابراین بعد از اینکه نوع الگوهای سلولی آشکار شدند، می توان جزئیات ساختارهای سلولی را توصیف کرد. در حالت پایداری خنثی، شکل سلولها را می توان چند ضلعی های

جواب زوج معادله اختلالی برای  $W$  به صورت زیر فرض می شود:

$$W = A_0 \cos(q_0 z) + A_1 \cosh(qz) + A^* \cosh(q^* z) \quad (35)$$

که  $A_0$  و  $A_1$  اعداد ثابت حقیقی و  $A^*$  عدد موهومی می باشد. با استفاده از شرط مرزی (۳۰) و جواب فوق به معادله ساده شده زیر می رسیم:

$$-q_0 \tan(\frac{1}{2}q_0) = \frac{(q_1 + q_2 \sqrt{3}) \sinh q_1}{\cosh q_1 + \cos q_2} + \frac{(q_1 \sqrt{3} - q_2) \sin q_2}{\cosh q_1 + \cos q_2} \quad (36)$$

که در این معادله،  $q_0, q_1, q_2$  مطابق (۳۴) تابعی از  $a$  و  $\lambda$  هستند و چون  $\lambda = \sqrt[3]{R_a/a^4}$  است، رابطه (۳۶) تابعی از عدد ریلی  $R_a$  بر حسب عدد موج  $a$  می شود که عبارتی ضمنی است و باید بصورت سعی و خطا حل شود. مقدار بحرانی عدد ریلی (مینیمم) و عدد موج مربوطه در مرجع [۵] برابر

$$a_C = 3.117, \quad R_{aC} = 1707.762 \quad (37)$$

با حل عددی معادله (۳۶)، توزیع عدد ریلی بر حسب عدد موج، بدست آمده و در نمودار (۴) نمایش داده شده است. در حل این معادله بدلیل آنکه به ازای هر مقدار از عدد موج چند رشته جواب وجود داشت، از یک حدس اولیه برای یافتن جواب صحیح استفاده شده است. مقادیر بحرانی  $a_C = 3.108, R_{aC} = 1707.838$  محاسبه شدند که به خوبی با مقادیر (۳۷) منطبق است.

بر حسب این مقادیر بحرانی، ریشه ها برابر می شوند با

$$q_0 = 3.973639, q_1 = 5.195214, q_2 = 2.126096 \quad (38)$$

و با فرض  $A_0 = 1$  و بکارگیری مقادیر  $q$  در رابطه (۳۸) جوابهای اختلالی  $W$  و  $\theta$  بدست می آیند.

## جواب فرد

جواب فرد به صورت زیر فرض می شود:

$$W = A_0 \sin(q_0 z) + A_1 \sinh(qz) + A^* \sinh(q^* z) \quad (39)$$

با انجام مراحل مشابه قبل، معادله مشخصه سیستم بصورت زیر بدست می آید:

$$q_0 \cot(\frac{1}{2}q_0) = \frac{(q_1 + q_2 \sqrt{3}) \sinh q_1}{\cosh q_1 - \cos q_2} - \frac{(q_1 \sqrt{3} - q_2) \sin q_2}{\cosh q_1 - \cos q_2} \quad (40)$$

$$a^2 = 4\pi^2 \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \quad (49)$$

به کمک معادله (۴۶)، مولفه های سرعت در صفحه افقی با روابط زیر حاصل می شوند:

$$u = -\frac{DW}{a^2} \frac{2\pi}{L_x} \sin \frac{2\pi}{L_x} x \cos \frac{2\pi}{L_y} y \quad (50)$$

$$v = -\frac{DW}{a^2} \frac{2\pi}{L_y} \cos \frac{2\pi}{L_x} x \sin \frac{2\pi}{L_y} y$$

از مشاهده خطوط جریان در صفحه افقی برای یک سلول مستطیلی با  $L_y = \frac{\sqrt{3}L_x}{2}$  و یک سلول مربعی [۵] ملاحظه می شود که سرعتها در مرکز سلول صفر هستند و دو گوشه روبرو همانند چشمه و دو گوشه دیگر همانند چاه عمل می کنند. سرعت عمودی در مراکز وجوه، حداکثر مقدار خود را دارد و با نزدیک شدن به مرکز سلول صفر می شود.

#### (ب) سلولهای شش وجهی

برای الگوی شش وجهی جواب زیر ارائه شده است [۶]:

$$w = \frac{1}{3}W(z) \left\{ 2\cos \frac{2\pi}{L\sqrt{3}}x \cos \frac{2\pi}{3L}y + \cos \frac{4\pi}{3L}y \right\} \quad (51)$$

به کمک معادله (۴۶)، مولفه های سرعت در صفحه افقی با روابط زیر داده می شوند:

$$u = -\frac{DW}{3a^2} \frac{2\pi}{L\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{L\sqrt{3}}x \cos \frac{2\pi}{3L}y \quad (52)$$

$$v = -\frac{DW}{3a^2} \frac{4\pi}{3L} \left( \cos \frac{2\pi}{L\sqrt{3}}x + 2\cos \frac{2\pi}{3L}y \right) \sin \frac{2\pi}{3L}y$$

پروفیل مولفه های سرعتها برای یک سلول شش وجهی در شروع ناپایداری در شکل های (۷)، (۸)، و (۹) بصورت سه بعدی ترسیم شده اند که با نتایج تصویر دو بعدی مرجع [۵] به خوبی منطبق است.

#### مرجع

1. Bejan, A., "convection Heat Transfer," 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, 1995.
2. Narasimhan, A., "Rayleigh-Benard Convection: Physics of a widespread phenomenon," Resonance, 4(6), p82-90, 1999.
3. Getling, A.V. & Brausch O., "Cellular flow patterns and their evolutionary scenarios in threedimensional Rayleigh-Benard convection," Phys. Rev. E 67, 046313, 2003.

منظم با سطوح متقارن فرض نمود. این سلولها به شکل مثلث متساوی الاضلاع، مربع و یا شش ضلعی هایی می توانند باشند که بطور منظم تکرار شده و دارای دیواره های عمودی متقارن بوده که روی دیواره های سلول گرادین سرعت عمودی صفر می شود و سرانجام سلولها در مجاور هم بطور یکسان تشکیل می شوند.

شرطی که گرادین سرعت عمودی روی دیواره های سلول صفر شود بصورت:

$$(n \cdot \nabla_{\perp}) w = 0 \quad (43)$$

که  $n$  یک بردار واحد قائم به دیواره های سلولی است و

$$\nabla_{\perp} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \quad (44)$$

برای مسئله مورد نظر، شرایط معادله (۴۳) معادل آنست که هردو سرعت افقی عمود بر دیواره سلول صفر شوند، یعنی:

$$w = F(x, y)W(z), \quad (\nabla_{\perp} F = -a^2 F) \quad (45)$$

و

$$u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \quad (46)$$

بطوری که

$$\nabla_{\perp} w = W \nabla_{\perp} F$$

$$u_{\perp} = \frac{DW}{a^2} \nabla_{\perp} F \quad (47)$$

$$u_{\perp} = \frac{1}{a^2} \frac{DW}{W} \nabla_{\perp} w$$

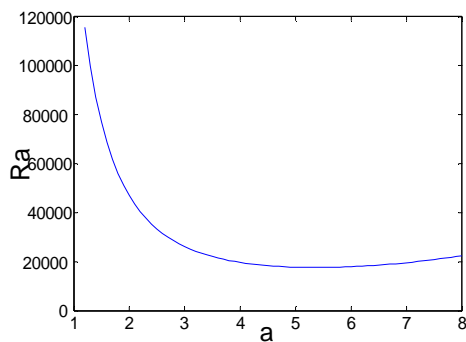
بنابراین صفر شدن  $\nabla_{\perp} w$  در امتداد یک جهت مشخص با صفر شدن بردار سرعت افقی  $u_{\perp}$  در همان امتداد تضمین می شود و برعکس. در زیر، الگوهای سلولی چهار ضلعی و شش ضلعی، بررسی می شوند.

#### (الف) سلولهای مستطیلی و مربعی

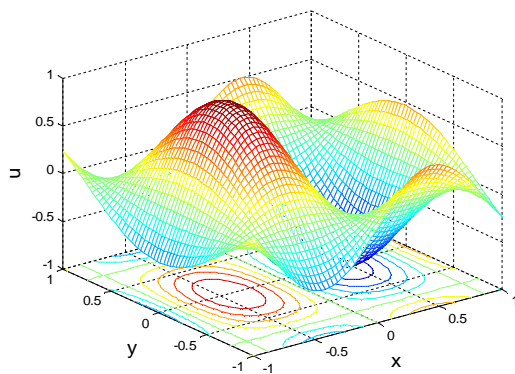
جواب زیر را برای مولفه عمودی سرعت در سلول ها در نظر بگیرید [۵]:

$$w = W(z) \cos \frac{2\pi}{L_x} x \cos \frac{2\pi}{L_y} y \quad (48)$$

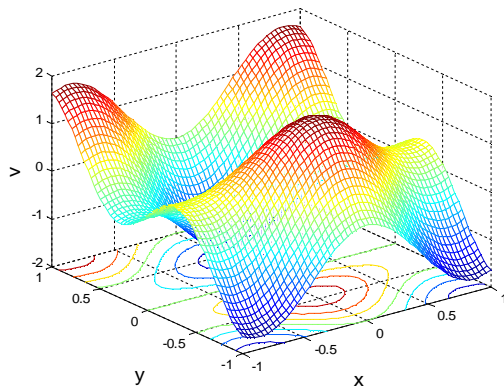
که  $L_x$  و  $L_y$  اعداد موج اختلالی در جهت های  $x$  و  $y$  هستند و با رابطه زیر به  $a$  مرتبط می شوند:



شکل 5 - نمودار عدد ریلی بر حسب عدد موج برای حالت دو مرز صلب (برای اولین مود جواب فرد).

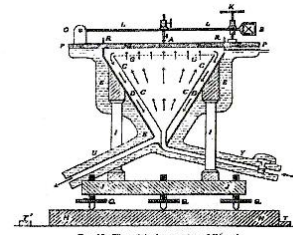


شکل 7 - توزیع مولفه افقی سرعت  $u$  در یک سلول شش وجهی.

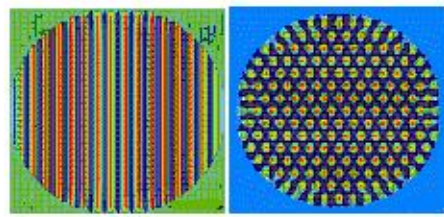


شکل 8 - توزیع مولفه افقی سرعت  $v$  در یک سلول شش وجهی.

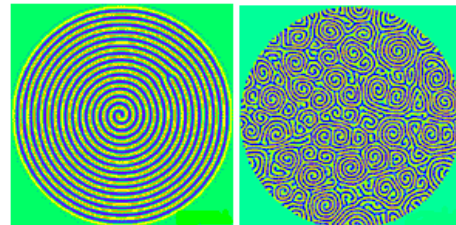
4. Xi, H.W. & Gunton, J.D., "Spiral defect chaos in a model of Rayleigh-Bénard convection," Phys. Rev. Lett. 71, p 2030-2033, 1993.
5. Chandrasekhar, S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability," Dover Pub., Inc., New York, 1981.
6. Drazin, P.G., "Hydrodynamic Stability," Cambridge University Press, 1981.
7. Xi, H. & Gunton, J.D., "Spatiotemporal Chaos in a Model of Rayleigh-Benard Convection," Physical Review E. p 4963-4975, 1995.



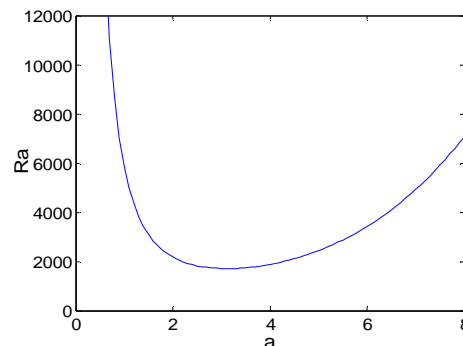
شکل ۱- دستگاه آزمایش بنارد [۵].



شکل ۲- الگوهای جابجایی، رولهای موازی (چپ) و شش وجهی (راست) [۲].

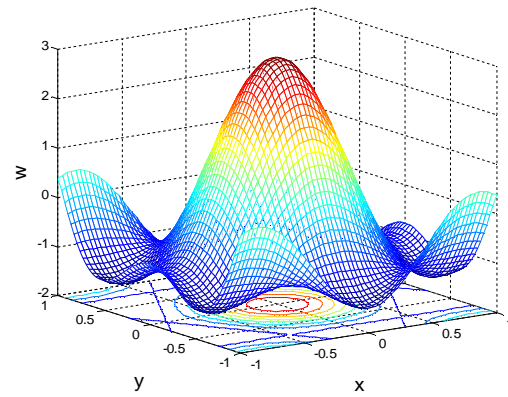


شکل ۳ - الگوهای بی نظمی حلزونی [۴].



شکل 4 - نمودار عدد ریلی بر حسب عدد بی بعد موج برای حالت دو مرز صلب (برای اولین مود جواب زوج).





شکل 9 - توزیع مولفه عمودی سرعت  $w$  در یک سلول شش وجهی.