# شبیه سازی جریان پره های توربوماشینهای محوری با استفاده از روش پانل تراکم پذیر

احمد صداقت	احمد همايون	مجتبی احمدی
استادیار دانشکده مکانیک	دانشجوی کارشناسی ارشد	دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مکانیک،	دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مکانیک،	دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مکانیک،
کد پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱	کد پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱	کد پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱
sedaghat@cc.iut.ac.ir	a.homayoon@me.iut.ac.ir	<u>m.ahmadi@me.iut.ac.ir</u>

چكیده: شبیه سازی جریان در توربوماشینها بمنظور بهبود كارایی و افزایش راندمان از مسائل مورد توجه پژوهشگران در چند دهه اخیر بوده است. مسئله طراحی بهینه پره های توربین، نیازمند تغییر پارامترهای هندسی جهت یافتن حالت مطلوب است. با توجه به قابلیت های روش پانل و سهولت كار طراحی با آن، می توان از این روش بعنوان ابزاری توانا جهت طراحی بهینه پارامترهای پره توربین استفاده نمود. از اینرو در ابتدا با استفاده از روش پانل، جریان ما بین پره های توربین شبیه سازی شده است. معادلات حل شده برای شبیه سازی جریان، معادلات پتانسیل تراکم پذیر در رژیم زیرصوتی هستند. از آنجاییکه روش پانل استاندارد برای حل معادله لاپلاس بکار می رود، برای حل معادلات پتانسیل تراکم پذیر در رژیم زیرصوتی هستند. از آنجاییکه روش پانل استاندارد برای حل مناسب صورت می پذیرد. بدین ترتیب معادله پتانسیل تراکم پذیر به معادله لاپلاس تبدیل می شود و می توان جریان تراکم پذیر را در گستره 8.08 می پادل در عین ترتیب معادله پتانسیل تراکم پذیر به معادله لاپلاس تبدیل می شود و می توان جریان تراکم پذیر بهمراه تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره استفاده شده است. در این برنامه از روش پانل گردابه ای با توزیع سهموی بهمراه تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره استفاده شده است. ارزیابی روش حل، بوسیله مقایسه نتایج با نتایج تجربی مربوط به پهمراه تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره استفاده شده است. ارزیابی روش حل، بوسیله مقایسه نتایج با نتایج تجربی مربوط به پره VKI-LS59 در گستره ماخ های مختلف انجام گرفته است. ارزیابی روش حل، بوسیله مقایسه نتایج با نتایج توزیع سهموی پره و VKI-LS59 در گستره ماخ های مختلف انجام گرفته است. این نتایج انطباق نسبتا خوبی با نتایج تجربی تا حدود عدد ماخ پره و ۲۵.۷۰ دارند، لیکن نتایج ماخ خروجی ۱۹۸۵ در قسمت انتهایی سطح مکش تا حدودی خطا دارد، علت این موضوع بدلیل بزرگتر شدن ترم های غیرخطی معادله پتانسیل تراکم پذیر در ناحیه گذرصوتی است. پس از ارزیابی روش حل با نیز یر ورش حل با نیزیبی برام دارد، علت این موضوع بدلیل بزرگتر شدن ترم های غیرخطی معادله پتانسیل تراکم پذیر در ناحیه گذرصوتی است. پس از ارزیابی روش حل با با نیزیب بررگتر شدن ترم های غیرخطی معادله پتانسیل تراکم پذیر در ناحیه گذرصوتی است. بر از ارزیابی روش حل با بان داره بر این این مول حل با بی بیزی

**واژگان کلیدی:** پره متحرک توربین محوری، روش پانل، معادلات پتانسیل تراکم پذیر، جریان زیر صوتی

#### ۱. مقدمه

شبیه سازی جریان در توربوماشینها بمنظور بهبود کارایی و افزایش راندمان همواره یکی از مسائل مورد توجه پژوهشگران در چند دهه اخیر بوده است. با توجه به هندسه پیچیده، تراکم پذیری، مغشوش و غیر دائم بودن این جریانها، مسئله طراحی در توربوماشینها، اساساً از پیچیدگیهای فراوانی برخوردار است. دشواریهای این موضوع هنگامی بیشتر می شود که کوچکترین جزئیات هندسی همچون فاصله بین پره ها، زوایای ورود وخروج جریان، ضخامت لبه فرار<sup>۱</sup> و لبه حمله<sup>۲</sup> و انحنای نواحی مختلف پره تاثیر بسزایی در کارایی توربین دارد. از آنجاییکه تغییرات این پارامتر ها از طریق روشهای تجربی بسیار پر هزینه است، روشهای عددی در طراحی توربوماشینها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Trailing edge

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Leading edge

در اواسط دهه هفتاد میلادی حل های عددی جریان تراکم پذیر با فرض جریان پتانسیل بعنوان ابزاری توانا جهت طراحی در صنعت توربوماشینها بکار گرفته شد. با این حال بدلیل اثرات تراکم پذیری و فرض جریان ایده ال تا حدودی منجر به انحراف نتایج از نتایج واقعی می گردد. بنابر این برای مرتفع کردن این مشکل، معادلات تراکم پذیر پتانسیل<sup>۱</sup> بکار گرفته شده است که در حال حاضر نیز کاربرد وسیعی در تحلیل جریان عبوری بر روی ایرفویلها و توربوماشینها دارد. دنتون[۱] جزو اولین محققانی است که حل معادلات اویلر را برای توربوماشینها توسعه داد. روش وی جزو روشهای حجم های محدود و از نظر حل معادلات از نوع صریح است. یی[۲] از روش طراحی مستقیم برای طراحی پره های توربوماشینها استفاده کرد. با توجه به زمان بر بودن روش های مستقیم، بتدریج محققان به روش های طراحی معکوس<sup>۲</sup> روی آوردند. لئونارد و همکاران[۳] و[۴] با استفاده از روش اویلر معکوس و با توجه به نمودار های توزیع عدد ماخ و فشار به طراحی هندسه پره پرداختند. همچنین داوس[۵] جهت بررسی جریان در انواع توربوماشینها از معادلات سه بعدی متوسط گیری شده ناویر استوکس استفاده نمود. گوئل و همکاران[۶] به بحث و بررسی مزایا و معایب روش های مهینه سازی عددی<sup>۲</sup>، روش دنبالگر گرادیان<sup>۴</sup> و الگوریتم ژنتیک<sup>۵</sup> جهت طراحی پره های توربوماشینها پرداختند. معایب روش های بهینه سازی عددی<sup>۲</sup>، روش دنبالگر گرادیان<sup>۴</sup> و الکوریتم ژنتیک<sup>۵</sup> جهت طراحی پره های توربوماشینها پرداختند. معایب روش های بهینه سازی عددی<sup>۲</sup>، روش دنبالگر گرادیان<sup>۴</sup> و ایکوریتم ژنتیک<sup>۵</sup> جهت طراحی پره های توربوماشینها پرداختند.

هزینه بالای محاسباتی روش های عددی و همچنین دشواری تغییر شبکه بندی اطراف هندسه از جمله مشکلات عموم روش های عددی است. در تحقیق حاضر با استفاده از روش پانل<sup>3</sup> به طراحی پارامترهای توربوماشینهای محوری پرداخته شده است. خصوصیاتی همچون هزینه پایین محاسباتی روش و عدم نیاز به شبکه بندی اطراف هندسه، منجر به سهولت در اعمال تغییرات در پارامترهای هندسی جهت طراحی بهینه، شده است. روش پانل نخستین بار توسط هس و اسمیت در سال ۱۹۶۲ ارائه شد. آنها با استفاده از توزیع دابلت با قدرت ثابت و شرط مرزی نیومن جریان پتانسیل را حول هندسه پیچیده سه بعدی مدل کردند[۸]. پس از آن، افراد بسیاری جهت ارتقای تئوری روش پانل فعالیت نمودند و با ارائه توزیع های مختلف خطی و سهموی روش پانل تراکم پذیر جهت شرط های مرزی دیریکله و نیومن جوابهای این روش را بهبود بخشیدند. مورینو و همکاران[۹] و[۱۰] از روش پانل تراکم پذیر جهت شبیه سازی جریان دائم زیر صوت و مافوق صوت بر روی هندسه های پیچیده استفاده کرد. همچنین روش پانل تراکم پذیر جهت شبیه سازی جریان دائم زیر صوت و مافوق صوت بر روی هندسه های پیچیده استفاده کرد. همچنین روش پانل غیر دائم جریان را بر روی صفحات مورب مدل کرد. همچنین محققان با استفاده از روش پانل جریان زیر صوت را بر روی پانل غیر دائم جریان را بر روی صفحات مورب مدل کرد. همچنین محققان با استفاده از روش پانل جریان زیر صوت را بر روی روش پانل شبیه سازی کرده اند. کامون[۱۳] و داسینگ[۱۴] از جمله محققانی هستند که جریان را بر روی یک پره توربین بادی با روش پانل شبیه سازی کرده اند. کامون[۱۳] و داسینگ[۱۴] از جمله محققانی هستند که جریان را بر روی یک پره توربین بادی با روش پانل شبیه سازی کرده اند. کامون[۱۳] و داسینگ[۱۴] از جمله محققانی هستند که جریان را بر روی یک پره توربین بادی با

#### ۲. معادلات حاکم

در این بخش معادله جریان پتانسیل تراکم پذیر حول یک جسم با هندسه دلخواه ارائه می شود. معادله پتانسیل تراکم پذیر که از معادلات بقای جرم و مومنتوم با فرض جریان دوبعدی، غیر لزج، غیر چرخشی و دائم بدست می آید، بصورت رابطهٔ (۱) می باشد[۱۶] و[۱۷] :

<sup>4</sup> Gradient Following Method

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Full Potential Equation

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Inverse design method

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Numerical optimization

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Genetic Algorithm

$$(1 - M_{\infty}^{2})\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = M_{\infty}^{2} \left[ (\gamma + 1)\frac{\hat{u}}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2}\frac{\hat{u}^{2}}{u_{\infty}^{2}} + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\hat{v}^{2}}{u_{\infty}^{2}} \right] \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + M_{\infty}^{2} \left[ (\gamma + 1)\frac{\hat{u}}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2}\frac{\hat{v}^{2}}{u_{\infty}^{2}} + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\hat{u}^{2}}{u_{\infty}^{2}} \right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + M_{\infty}^{2} \left[ \frac{\hat{v}}{u_{\infty}} \left( 1 + \frac{\hat{u}}{u_{\infty}} \right) \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right]$$

$$(1)$$

 $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}$  که جریان آزاد سیال با سرعت  $u_{\infty}$  در جهت x با عدد ماخ  $M_{\infty}$  فرض شده است.  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه سیال می باشد و  $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}$  مولفه های سرعت اغتشاشی در جهت های x و x هستند و بصورت رابطه زیر تعریف می شوند. (۲)  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{\infty}$  ,  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}$ 

بطور کلی معادله پتانسیل تراکم پذیر، غیر خطی است و بسادگی قابل حل نمی باشد. با این وجود با فرض 1>>  $\frac{\hat{v}}{u_{\infty}}$  و  $\frac{\hat{u}}{u_{\infty}}$ ,  $\frac{\hat{v}^2}{u_{\infty}^2}$ 

$$(1 - M_{\infty}^{2})\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0$$
 (7)

معادلهٔ (۳) در ناحیه زیرصوتی تا عدد ماخ 0.8 > M<sub>∞</sub> و در ناحیه ما فوق صوتی در گستره ماخ 5 > L.2 < M و ار است. این معادله بدلیل حذف ترمهای غیر خطی معادلهٔ (۱) در ناحیه گذرصوتی برقرار نمی باشد. از اینرو پدیده هایی همچون شوک با استفاده از معادله پرانتل-گلوارت قابل مشاهده نیست[۱۸]. همچنین ضریب فشار با استفاده از معادله برنولی تراکم پذیر و با فرض جریان آیزنتروپیک از رابطه زیر بدست می آید:

$$C_{\rm P} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 (1 - u^2) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right\}$$
(\*)

با استفاده از ضریب تصحیح تراکم پذیری پرانتل-گلوارت (eta)، معادله (۳) را بصورت زیر نوشته می شود:  $eta^2 = 1 - M_m^2$ 

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0$$
 (a)

با تغییر مختصات x و y به مختصات جدید  $\xi$  معادله (۵) به معادله لاپلاس استاندارد تبدیل می شود.

$$\eta = \beta y$$
 ,  $\xi = x$  (?)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \tag{V}$$

از حل معادله (۷) توزیع سرعت بر روی جسم حاصل می شود که با استفاده از آن می توان ضریب فشار را از معادله (۴) محاسبه نمود و پس از آن با داشتن ضریب فشار و توزیع سرعت، می توان توزیع عدد ماخ بر روی سطح پره را تعیین کرد. ۵۹ م 1 م۰۵

$$\mathbf{i} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \tag{(A)}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Perturbation velocity

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Prandtl-Glauert Equation

#### ۳. روش پانل

اساساً حل معادله پتانسیل با استفاده از روشهای مختلفی از جمله روشهای انتگرالی و تفاضل محدود انجام می پذیرد که با گسسته سازی معادلات بر روی شبکه، مساله را تحلیل می کنند[۱۹]. لیکن با توجه به دشوار بودن تولید هندسه و شبکهٔ مورد نیاز آن، استفاده از روشهایی همچون روش پانل برای حل جریان پتانسیل مورد توجه محققان قرار گرفته است. خصوصاً در مسائلی که جهت بهینه سازی و طراحی هندسه جسم، نیاز به تغییر خصوصیات هندسی است، استفاده از این روش گزینهٔ بسیار مناسبی است. از آنجائیکه در این روش نیاز به تولید شبکه نیست، به سهولت می توان پارامترهای هندسی جسم را تغییر داد تا به حالت بهینه دست یافت. در این بخش به تشریح روش پانل پرداخته می شود.

بطور کلی، با استفاده از یک توزیع مناسب از المانهای منفرد نظیر دابلت<sup>۱</sup> و گردابه<sup>۲</sup> در داخل جسم می توان جریان پتانسیل حول یک جسم دلخواه را تحلیل نمود[۲۰] و[۲۱]. با توجه به قضیه گرین، توزیع المانهای منفرد در داخل جسم باید بگونه ای باشد که شرط مرزی عدم نفوذ بر روی سطح جسم ارضا شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -U_{\infty}.n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{9}$$

که  $\mathbb{D}_{\infty}$  سرعت جریان آزاد، n بردار عمود بر سطح و  $\phi$  تابع پتانسیل ناشی از توزیع المانهای منفرد است و  $\Phi$ مقدار کل پتانسیل جریان است.



شکل ۱. توزیع پانل ها بر روی سطح جسم

در این روش هندسهٔ سطح بصورت یک سری پانل مسطح مطابق شکل (۱) گسسته می شود که موقعیت مکانی هر پانل با نقطه کنترل<sup>۳</sup> Zc,j مشخص می شود. سپس توزیع مناسب المانهای منفرد بگونه ای که معادله (۹) بر روی هر پانل ارضا شود، بدست می آید. شکل کلی تابع توزیع پتانسیل بصورت زیر است:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \int_{j} \left[ \frac{q(s)}{2\pi} \ln r - \frac{\gamma(s)}{2\pi} \theta \right] ds \tag{1.1}$$

(s) و (s) تابع توزیع دابلت و گردابه در هر پانل هستند که بصورت توزیعهای ثابت، خطی و سهموی در نظر گرفته می شوند. از آنجائیکه مقدار سیرکولاسیون برای جریان پتانسیل حول جسم برابر صفر است، می بایست شرط مرزی کوتا<sup>۴</sup> در قسمت انتهایی جسم مطابق شکل (۱) بر روی پانل ویک<sup>۵</sup> اعمال شود تا تضمین کنندهٔ جریان غیر چرخشی حول جسم باشد. بنابراین درصورتیکه از المان دابلت استفاده شود، قدرت دابلت بر روی پانل ویک از رابطه زیر بدست می آید:  $q_w = q_N - q_1$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Doublet singularity

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Vortex singularity

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Control point

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Kutta condition

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Wake panel

بدین ترتیب با حل همزمان معادلات مربوط به n+1 پانل، قدرت المانهای منفرد برروی هر پانل بدست می آید و توزیع سرعت در جهتهای X و y برروی سطح جسم از رابطه (۱۲) قابل محاسبه است.

$$u_{i} = u_{\infty} \cos \alpha_{i} + \sum_{j=1}^{N} q(s)_{j} u_{sij} + \sum_{j=1}^{N} \gamma(s)_{j} u_{vij}$$
$$v_{i} = u_{\infty} \sin \alpha_{i} + \sum_{j=1}^{N} q(s)_{j} v_{sij} + \sum_{j=1}^{N} \gamma(s)_{j} v_{vij}$$
(17)

و ر(s)<sub>j</sub> و  $v_{sij}$  قدرت دابلت و گردابه هستند،  $\alpha_i$  زاویهٔ پانل i-ام،  $u_{sij}$  و  $v_{sij}$  مولفه های سرعت در پانل i-ام در اثر قدرت  $\gamma(s)_j = q(s)_j$ دابلت در پانل j-ام و  $u_{sij}$  و  $u_{sij}$  می باشند. همچنین میدان سرعت حول جسم نیز به طریق مشابه با ایجاد شبکه در اطراف جسم از رابطه (۱۲) قابل محاسبه است.

نکتهٔ دیگری که می بایست در محاسبات روش پانل لحاظ شود اثر تراکم پذیری است. همانطور که در بخش گذشته نشان داده شد، در محدودهٔ جریانهای زیرصوتی ( $M_{\odot} < 0.8$ ) می توان از معادله پرانتل-گلوارت (معادله ۳) استفاده نمود که این معادله ماهیت خطی دارد[۲۲] و با توجه به رابطه (۷) به معادله لاپلاس تبدیل می شود. بنابراین برای اعمال اثر تراکم پذیری در روش پانل لازم است که هندسه واقعی با توجه به تغییر مختصات داده شده در رابطه (۶) به هندسه جدید تبدیل شود. بنابراین برای اعمال اثر تراکم پذیری در بوش پانل لازم است که هندسه واقعی با توجه به تغییر مختصات داده شده در رابطه (۶) به هندسه جدید تبدیل شود. بدین ترتیب با حل معادله لاپلاس بر روی هندسه واقعی با توجه به تغییر مختصات داده شده در رابطه (۶) به هندسه جدید تبدیل شود. بدین ترتیب با حل معادله لاپلاس بر روی هندسه جدید در حقیقت معادله تراکم پذیر پرانتل-گلوارت بر روی هندسه واقعی حل می شود و سپس کمیتهایی همچون سرعت و ضریب فشار از روابط (۸) و (۴) محاسبه می شود. باید توجه داشت که معادله پتانسیل در ناحیه سپس کمیتهایی همچون سرعت و ضریب فشار از روابط (۸) و (۴) محاسبه می شود. باید توجه داشت که معادله پتانسیل در ناحیه اسپس کمیتهایی همچون سرعت و ضریب فشار از روابط (۸) و (۴) محاسبه می شود. باید توجه داشت که معادله پتانسیل در ناحیه اسپس کمیتهایی همچون سرعت و ضریب فشار از روابط (۸) و (۴) محاسبه می شود. باید توجه داشت که معادله پتانسیل در ناحیه اسپس کمیتهایی همچون سرعت و ضریب فشار از روابط (۸) و (۴) محاسبه می شود. باید توجه داشت که معادله پتانسیل در ناحیه گذرصوتی (آ12) م

## ۴. تشريح هندسه و الگوريتم حل

هدف از تحقیق حاضر ارائه روشی ساده و با هزینه محاسباتی پایین جهت طراحی توربوماشینهای محوری است. بطور کلی در توربوماشینها دو نوع پره وجود دارد. پره ساکن<sup>۳</sup> که به استاتور متصل است و پره متحرک<sup>۴</sup> که بر روی روتور نصب شده است. در توربوماشینهای محوری این پره ها بصورت دسته پره های ساکن و متحرک بدنبال یکدیگر در امتداد روتور قرار می گیرند. جریان پس از برخورد با پره های متحرک ردیف اول، یک گشتاور محوری به آنها وارد می کند و جهت جریان تغییر می یابد. سپس پره های ساکن ردیف اول جهت جریان را به وضعیت مطلوب بر می گردانند تا جریان بتواند با پره های متحرک ردیف دوم برخورد کند. این موضوع در شکل (۲) نشان داده شده است. بدلیل لزجت سیال و افتها و اغتشاشات داخلی، در هر مرحله از انرژی و هد

طراحی هندسه پره های متحرک و ساکن توربوماشینها بر اساس نوع کاربردشان کاملا متفاوت است که بدلیل پیچیدگی های جریان در توربوماشینها بتدریج در طول چند دهه و با ابزارها و روش های متعددی به تکامل رسیده است. در تحقیق حاضر به بررسی جریان مابین پره های متحرک توربین گازی با استفاده از روش پانل تراکم پذیر با شرط مرزی دیریکله پرداخته شده است. بدین منظور یک برنامه کامپیوتری به زبان فرترن<sup>۵</sup> نوشته شده است که قابلیت حل جریان ما بین پره های توربین را دارد. هندسه مسئله انتخاب شده مربوط به پره توربین وربین VKI-LS59 است که نتایج آن در گستره ای از ماخ های مختلف مورد بررسی قرار

<sup>3</sup> Stator blade

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Field Panel Method

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Finite difference

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Rotor blade

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> FORTRAN

گرفته است. هندسه مسئله حل شده در شکل (۳) نشان داده شده است. [۲] طول وتر پره 58mm و فاصله بین دو پره 41mm می باشد. در شرایط طراحی زاویه ورودی ۳۰ درجه و زاویه خروجی جریان ۶۷/۵ درجه است[۲۵]. پره متحرک توربین بگونه ای طراحی شده است که فشار سطح پایین پره بیشتر از سطح بالایی باشد. از اینرو سطح پاینی را سطح فشاری<sup>٬</sup> و سطح بالایی را سطح مکش<sup>۲</sup> می نامند.



در برخی مسائل بخشی از هندسه حل بصورت پریودیک تکرار می شود بگونه ای که اگر قسمتی از هندسه را انتخاب کرده و جریان را در آن بخش تحلیل کنیم، می توان نتایج را برای کل جریان تعمیم داد. در تحقیق حاضر برای حل جریان بر روی یک دسته پره<sup>۳</sup> در توربوماشینهای محوری از شرط پریودیک استفاده شده است و با انتخاب ناحیه محدود به سه پره، جریان بر روی پره میانی تحلیل شده است. از اینرو فرایند پانل زدن بر روی سه پره انجام می شود. بنابراین جریان حول پره مزبور علاوه بر پانل های پره میانی، از پانل های پره های بالایی و پایینی نیز تاثیر می پذیرد.

پره توربین یکی از پیچیده ترین هندسه هایی است که در مباحث آیرودینامیک مطرح می باشد. بعنوان نمونه انحنای تقریبا ۱۸۰ درجه ای لبه حمله و لبه فرار پره، موجب چرخش ناگهانی جریان در این نواحی می شود و شبیه سازی های عددی را با مشکلاتی مواجه می کند. وجود این انحنای شدید باعث می شود که پاسخهای حل عددی تا حدودی از حل های تجربی انحراف داشته باشد. بعنوان نمونه یک پرش در مقادیر ضریب فشار در ناحیه ۴ درصد انتهایی پره وجود دارد که در حل های معادلات ناویر استوکس به علت عدم تطبیق مناسب شبکه تولید ضدیه در ناحیه ۴ درصد انتهایی پره وجود دارد که در حل های معادلات ناویر استوکس به علت عدم تطبیق مناسب شبکه تولید شده در ناحیه ۴ درصد انتهایی پره وجود دارد که در حل های معادلات ناویر استوکس به علت عدم تطبیق مناسب شبکه تولید شده در ناحیه لبه فرار می باشد[۴]. همانطور که در شکل (۴) نشان داده شده روش های مرتبه بایین نیز این پرش ناگهانی در لبه فرار وجود دارد. لیکن در تحقیق حاضر با استفاده از روش های مرتبه باین به روش پانل مرتبه پایین نیز این پرش ناگهانی در لبه فرار وجود دارد. لیکن در تحقیق حاضر با استفاده از مربوش های مرتبه بالتر پانل همچون روش سهموی گردابه <sup>1</sup> این مشکل مرتفع گردیده است. همانطور که ملاحظه می شود، نتایچ مربوش های مربوط به روش پانل سهموی خون روش سهموی گردابه <sup>1</sup> این مشکل مرتفع گردیده است. همانطور که ملاحظه می شود، نتایج مربوش های مرتبع عدد ماخ در لبه فرار پره توربین که در بسیاری از حل های عددی مشاهده شده است را مرتفع ساخته است. علت مربوط به توزیع عدد ماخ در لبه فرار پره توربین که در بسیاری از حل های عددی مشاهده شده است را مرتفع ساخته است. علت مربوط به توزیع عدد ماخ در لبه فرار پره توربین که در بسیاری از حل های عددی مشاهده شده است را مرتفع ساخته است. علت مربوط به توزیع عدد ماخ در لبه فرار پره توربین که در بسیاری از حل های عددی مشاهده شده است را مرتفع ساخته است. علت مربوط به توزیع عدد ماخ در لبه فرا پره توربین که در بسیاری از حل های گردابه سهموی در مرا درد. برا مرفوع تاثیر نقطه اضافه شده در نزدیکی لبه فرار است. توزیع المان گردابه سهموی در هر پانل با رابطه +  $(\mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{x} +$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pressure surface

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Suction surface

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Cascade turbine blade

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Quadratic Strength Doublet Method

نیاز است که با اعمال شرط مرزی در یک نقطه اضافی درون جسم بدست می آید. باید توجه داشت که نتیجه مطلوب زمانی حاصل می شود که این نقطه اضافی در نزدیکی لبه فرار قرار داده شود[۲۰].



شکل ۴. نمودار توزیع عدد ماخ بر روی پره توربین واثر توزیع های مختلف قدرت گردابه بر روی پانل ها برای ماخ خروجی ۷۵/۰

از دیگر مواردی که بدان پرداخته شده است، انتخاب نوع المان است. در تحقیق حاضر از المان های گردابه و دابلت با توزیع های ثابت، خطی و سهموی استفاده شده است. از آنجاییکه نتایج مربوط به المان گردابه ای نسبتا انطباق بهتری با نتایج تجربی دارد[۲۶]، در ادامه تحلیل ها از این نوع المان با توزیع سهموی استفاده شده است.

در طراحی هندسه پره توربین علاوه بر خصوصیات آیرودینامیکی، می بایست اثرات مواردی همچون دمای کاری بالا، سیستم های خنک کاری داخلی پره و مسائل مربوط به طراحی متالورژیکی پره نیز اعمال گردد. بعنوان مثال می توان به لبه فرار پره توربین اشاره کرد که بر خلاف ایرفویلها تا حدودی ضخیم است و این موضوع منجر به مشکلات آیرودینامیکی می شود[۶]. در روش پانل شرط کوتا که متضمن فرض جریان پتانسیل است در نوک تیز انتهایی ایرفویلها اعمال می گردد و جریان به موازات سطح جسم، خارج شده تا به نقطه سکون برسد[۲۰]. ولی با توجه به اینکه لبه انتهایی پره توربین ضخیم است تعیین نقطه سکون پشت جسم از اهمیت بسزایی برخوردار است. برخی از محققان با نوک تیز کردن تصنعی لبه فرار، شرط کوتا را در آن ناحیه اعمال نموده اند[۲۲]. تمهیدی که برای اصلاح نتایج در ناحیه انتهایی پره در تحقیق حاضر اندیشیده شده است، تعیین دقیق نقطه سکون با استفاده از یک روش جستجوگر تکرار شونده (سعی و خطا) در پشت پره است. ابتدا یکی از نقاط حاصل از تلاقی دو پانل دلخواه در قسمت انتهایی پره (بعنوان نمونه نقطه ۲ در شکل ۵) به عنوان فرض اولیه نقطه سکون درنظر گرفته می شود. سپس برای آگاهی از صحت موقعیت نقطه سکون فرضی، از دو نقطه کمکی<sup>1</sup> مطابق شکل (۵) استفاده شده است. این نقاط با فاصله کمی در با یین دست لبه فرار و در بالا و پایین خطی که به موازات جریان خروجی رسم می شود قرار می گیرند. از آنجاییکه جریان های سکون فرضی را با نوای یک درصد چک کرد. بدین ترتیب با استفاده از یک عملیات جستجوگر تکراری در بین پانل های موجود در لبه فرار می توان نقطه سکون را تعیین نمود. پس از تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره، نتایج توزیع عدد ماخ با حالت نقط سکون فرضی را با خطای یک درصد چک کرد. بدین ترتیب با استفاده از یک عملیات جستجوگر تکراری در بین پانل های موجود در لبه فرار می توان نقطه سکون را تعیین نمود. پس از تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره می توزی با ماند ماند مان بی ون می می مود در خر کر بین پانل های موجود در لبه فرار می توان نقطه سکون را تعیین نمود. پس از تعیین دقیق نقطه سکون انتهای پره، نتایج توزی با سانقطه سکون دقیق

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Test Point





از دیگر از عواملی که در صحت جوابها تاثیر بسزایی دارد، فرایند توزیع پانل ها روی سطح جسم است [۲۸]. با توجه به انحنای شدید پره در نواحی جلو و عقب پره، برای مدل کردن دقیقتر هندسه انتظار می رود که تمرکز پانل ها نسبت به نواحی دیگر بیشتر باشد. لیکن باید به این نکته توجه داشت که تغییرات طول پانل ها نسبت به پانل های مجاور نباید زیاد باشد. از اینرو در نواحی لبه فرار و لبه حمله با استفاده از یک سری هندسی، نسبت طول هر پانل به پانل ماقبلش در حدود ۱/۳ در نظر گرفته شده است و هرچه به نواحی میانی پره نزدیک می شویم طول پانل ها افزایش می یابد. این نسبت طول پس از فاصله گرفتن از لبه فرار و لبه حمله کاهش می یابد تا در وسط پره به مقدار واحد برسد. بدینوسیله تمرکز مورد نیاز در قسمت های ابتدایی و انتهایی همانگونه که در شکل (۵) نشان داده شده است، حاصل می شود.

اثر افزایش تعداد پانل ها آخرین موضوع مورد بحث در این بخش است. حل های انجام شده بر روی پره های توربین به روش پانل، با انتخاب ۴۰ پانل دارای دقت نسبتا خوبی است. با افزایش تعداد پانل ها به ۱۲۰ پانل دقت جوابها تا حدودی بهبود می یابد. خصوصا در نواحی لبه حمله و لبه فرار جوابها با مقادیر تجربی تطابق بهتری دارد. از آنجاییکه هزینه محاسباتی روش پانل بسیار پایین است و تعداد پانل ها در زمان محاسبات تاثیر چندانی ندارد، از ۱۲۰ پانل در سایر تحلیل های انجام گرفته استفاده شده است.

#### ۵. ارائه و تحلیل نتایج

در این بخش به بررسی و تحلیل نتایج ارائه شده در این تحقیق پرداخته شده است. در ابتدا صحت نتایج روش پانل برای جریان مابین پره های توربین بوسیله مقایسه با نتایج تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته است. پس از اطمینان یافتن از درستی روش و کارکرد برنامه های کامپیوتری به مطالعه و بررسی پارامترهای موثر در طراحی پره های توربین پرداخته شده است. مسئله طراحی بهینه پره ها نیازمند تغییر پارامترهای هندسی جهت یافتن حالت مطلوب است. باتوجه به اینکه در عموم روش های عددی تغییر پارامترهای طراحی مستلزم تغییرات در هندسه و خصوصا شبکه بندی انجام گرفته در اطراف هندسه است، مسئله طراحی را به فرایندی زمانبر، پیچیده و پر هزینه تبدیل کرده است[۶]. از آنجاییکه در روش پانل نیاز به تولید شبکه نیست و اساساً هزینه محاسباتی روش پایین است، این روش بعنوان یک راهکار بسیار مفید جهت طراحی پره های توربین می تواند مورد

## ۱٫۵. ارزیابی

بطورکلی استفاده از نتایج بخش طراحی زمانی میسر است که صحت برنامه های کامپیوتری مورد تائید قرار گرفته باشد. از اینرو نتایج بدست آمده از حل جریان به روش پانل با درنظر گرفتن اثرات تراکم پذیری، با نتایج تجربی که بر روی پره توربین ایت که بوسیله چهار گروه از محققین اروپایی در چهار تونل باد متفاوت بصورت جامع برای رژیم های جریان زیر صوت و گذر صوتی مورد بررسی قرار گرفته است[70].

توزیع عدد ماخ برحسب طول پره بر روی سطوح مکش و فشار پره و برای ماخ خروجی ۰/۶۲ با روش پانل گردابه مرتبه دو با ۱۲۰ پانل بدست آمده که در شکل (۷) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود تطابق بسیار خوبی مابین نتایج تجربی و کار حاضر وجود دارد. جریان از ماخ ۰/۲۳ در ورودی تا حوالی ماخ ۰/۷۱ افزایش و سپس تا عدد ماخ خروجی ۶/۱۰ کاهش می یابد. تغییرات عدد ماخ جریان بر روی سطح فشاری پره تا قسمت میانی ناچیز است و پس از آن با یک شیب افزاینده تا ماخ خروجی افزایش می یابد.



بطور مشابه در شکل های (۸) و (۹) و (۱۰) توزیع عدد ماخ بر حسب ماخ خرجی ۱۰/۷۵، ۱۸/۱ و ۱۹/۵ نشان داده شده است. نتایج شکل(۸) انطباق نسبتا خوبی با نتایج تجربی دارد لیکن نتایج مربوط به ماخ خروجی ۱۸/۱ که در شکل (۹) نشان داده شده است در ناحیه ۵۰٪ تا ۸۰٪ از طول وتر در سطح مکش تا حدودی از نتایج تجربی انحراف داشته است. این موضوع در شکل (۱۰) که مربوط به نتایج ماخ خروجی ۱۹/۵ است با شدت بیشتری نمایان می شود. علت این مسئله همانطور که در بخش(۲) بیان

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Von Karman Institute

شد، بزرگتر شدن ترم های غیرخطی معادله پتانسیل تراکم پذیر در ناحیه گذر صوتی است و از آنجاییکه معادلات روش پانل تراکم پذیر از معادله پتانسیل خطی استنتاج شده است، نمی توان از این روش در ناحیه گذر صوتی استفاده کرد. لیکن می توان با استفاده از روش هایی همچون روش پانل میدانی، که ترکیبی از روشهای تفاضل محدود و روش پانل است در ناحیه گذر صوتی استفاده نمود[۲۳].



## ۲٫۵. طراحی پارامترهای بهینه

اگرچه در طراحی آیرودینامیکی پره متحرک توربین، افزایش سطح محصور مابین سطوح مکش و فشار در نمودار توزیع عدد ماخ، نیروی لیفت را افزایش می دهد، در عمل می بایست تاثیر عوامل دیگری نظیر فضای لازم جهت کانال های خنک کننده، استحکام مکانیکی پره در برابر تنش های وارده و هزینه ساخت در طراحی پارامترهای هندسی پره توربین لحاظ شود. از همین روی است که در ناحیه لبه فرار پره توربین لحاظ شود. از همین استحکام مکانیکی پره در برابر تنش های وارده و هزینه ساخت در طراحی پارامترهای هندسی پره توربین لحاظ شود. از همین روی است که در ناحیه لبه فرار پره توربین، با وجود خصوصیات آیرودینامیکی مطلوب لبه فرار نازک، نمی توان ضخامت این ناحیه را کاهش داد. بطورکلی در طراحی بهینه توربین پارامترهای سیری مقار نازک، نمی توان ضخامت این ناحیه پارامتر تاثیر گذار است[۲۹]. از جمله این عوامل می توان به فاصله بین دو پره، زاویه ورود و خروج جریان، ضخامت لبه فرار و جزئیات هندسی همچون انحنای بخش های مخاط می توان به فاصله بین دو پره، زاویه ورود و خروج جریان، ضخامت این ناحیه پارامتر تاثیر گذار است[۲۹]. از جمله این عوامل می توان به فاصله بین دو پره، زاویه ورود و خروج جریان، ضخامت لبه فرار و جزئین هرار و به فرار و به فاصله بین دو پره، زاویه ورود و خروج جریان، ضخامت لبه فرار و مروبین پارامتر تاثیر گذار است[۲۹]. از جمله این عوامل می توان به فاصله بین دو پره، زاویه ورود و خروج جریان، ضخامت لبه فرار و مورد برئیت هندسی همچون انحنای بخش های مختلف پره اشاره کرد. در تحقیق حاضر تاثیر فاصله بین دو پره و زاویه حمله جریان مورد بررسی قرار گرفته است. لازم بذکر است که پارامترهای مورد بحث در این بخش تنها به جهت نشان دادن توانایی روش پانل و سهولت کار طراحی با آن آورده شده اند، از اینرو تنها به ارائه نتایج تغییرات پارامتر ها اکتفا شده است.

#### ۳٫۵. فاصله مابین دو پره

یکی از عوامل بسیار مهم در بازدهی توربین انتخاب فاصله بین پره هاست. از آنجاییکه با افزایش فاصله بین پره ها از تعداد پره ها در یک دسته پره کاسته می شود، بارهای آیرودینامیکی وارد بر دسته پره افزایش می یابد. همچنین با کاهش تعداد پره ها، از هزینه ساخت توربین و حجم خنکاری قطعات کاسته می شود[۶]. در شکل (۱۱) نمودار توزیع عدد ماخ بر حسب طول پره برای فواصل مختلف پره ها در ماخ خروجی ۰/۷۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود با افزایش می یابد. با این ها، سطح محصور مابین سطوح مکش و فشار افزایش یافته است و بعبارت دیگر نیروی لیفت وارد بر پره افزایش می یابد. با این وجود توجه به دو نکته بسیار حائز اهمیت است. با افزایش فاصله، اگرچه نیروی لیفت افزایش یافته اما از تعداد پره ها در یک دسته پره کاسته شده است. در حقیقت مقدار نیروی لیفت برای یک پره نمی تواند معیار طراحی خوبی باشد بلکه ملاک طراحی نیروی لیفت وارد بر یک دسته پره است. همچنین پارامترهای طراحی باید بگونه ای انتخاب شود که پدیده جدایش جریان در سطح پره روی ندهد. بدلیل وجود گرادیان فشار زیاد در قسمت انتهایی سطح مکش، احتمال جدایش جریان در این ناحیه بیش از نواحی دیگر است، از اینرو در طراحی سعی بر آن است که نسبت عدد ماخ ماکسیمم به ماخ خروجی کوچک شود[۵]. همانطور که از شکل (۱۱) ملاحظه می شود با افزایش فاصله بین پره ها، مقدار ماکسیمم عدد ماخ بر روی سطح مکش افزایش یافته است، که این موضوع موجب افزایش احتمال جدایش جریان می گردد که اثر نامطلوبی به شمار می رود.



شکل ۱۱. بررسی اثر تغییر فاصله بین پره ها (Blade Spacing) بر جریان 🦳 شکل ۱۲. بررسی اثر تغییر زاویه حمله بر جریان

#### ۴٫۵. اثر تغییر زاویه حمله

از دیگر عوامل تاثیرگذار بر مقدار نیروی لیفت پره، زاویه حمله جریان است. نتایج مربوط به جریان با ماخ خروجی ۰/۷۵ و با تغییر زاویه حمله جریان به اندازه ۱۰+ و ۱۰- درجه در شکل (۱۲) نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود در قسمت انتهایی پره، تغییر زاویه ورودی جریان تاثیر چندانی بر توزیع عدد ماخ نداشته است. در صورتیکه در نواحی جلویی پره تا حدود قسمت میانی پره، توزیع عدد ماخ در زوایای مختلف روند متفاوتی داشته است. در حالتی که زاویه ورودی افزایش یافته است، در حقیقت نقطه سکون در لبه حمله به سمت سطح فشار انتقال یافته است و نیروی لیفت وارد بر پره افزایش می یابد. لیکن باید توجه داشت که افزایش بیش از حد زاویه حمله موجب افزایش نامطلوب افتهای اصطکاکی جریان می شود. از سوی دیگر با کاهش زاویه حمله، نقطه سکون به سمت صفحه مکش متمایل می گردد و نیروی لیفت کاهش می یابد. بنابر این در انتخاب زاویه مناسب علاوه بر مقدار نیروی لیفت می بایست به مقدار افت انرژی جریان عبوری از یک دسته پره توربین نیز توجه شود.

#### ۶. نتیجه گیری

هدف از تحقیق حاضر، ارائه روشی ساده و انعطاف پذیر جهت طراحی بهینه پارامترهای پره های توربین است. از اینرو با استفاده از روش پانل گردابه ای سهموی و با تصحیح اثر تراکم پذیری، مسئله مربوط به هندسه پره متحرک VKI-LS59 در گستره ماخ های مختلف و با استفاده از یک برنامه کامپیوتری تحلیل شد. همچنین نتایج عددی با نتایج کار تجربی مرجع[۲۵] مقایسه گردید. این نتایج انطباق نسبتا خوبی تا حدود عدد ماخ خروجی ۰/۸۱ دارند، لیکن نتایج ماخ خروجی ۰/۹۵ در قسمت انتهایی سطح مکش تا حدودی خطا دارد، علت این موضوع بدلیل بزرگتر شدن ترم های غیرخطی معادله پتانسیل تراکم پذیر در ناحیه گذرصوتی است و از آنجاییکه معادلات روش پانل تراکم پذیر از معادله پتانسیل تراکم پذیر خطی استنتاج شده است، نمی توان از این روش در ناحیه گذرصوتی استفاده نمود. سپس با تغییر پارامترهایی نظیر فاصله بین پره ها و زاویه حمله توانایی روش جهت طراحی بهینه توربین نشان داده شده است.

## ۷. کارهای آینده

همانطور که ملاحظه شد، روش پانل ابزاری بسیار توانا در شبیه سازی جریان مابین پره های توربین و طراحی بهینه هندسه مطلوب است. با توجه به اینکه هزینه محاسباتی این روش بسیار پایین است، امروزه با استفاده از روش پانل هندسه های سه بعدی پیچیده نظیر هواپیما، موشک و کشتی ها را تحلیل می کنند. از اینرو به نظر می رسد که می توان از این روش جهت مدل کردن هندسه سه بعدی پره توربین استفاده نمود. همچنین با استفاده از روشهای ترکیبی همچون روش پانل میدانی امکان شبیه سازی پدیده های مربوط به جریان گذر صوتی همچون شوک های بین پره های توربین وجود دارد. از دیگر مواردی که در ادامه این کار می توان بدان پرداخت، استفاده از حل غیر دائم روش پانل جهت مدل کردن کلیه پره های ساکن و متحرک یک توربین است. بدین ترتیب میتوان پارامترهای هندسی مربوط به هریک از پره های توربین اعم از پره های متحرک و پره های ساکن را تغییر داد و اثر آن را بر روی بازده کل توربین مشاهده کرد.

## مراجع

- [1] An Improved Time-Marching Method for Turbo machinary Flow Calculation. Denton, J. s.l. : J. of Engineering Power, 1983, Vol. 105.
- [2] ASystematic Computational Design System for Turbine Cascades. Z.Ye. s.l. : j.Eng. for Gas Turbines and Power, 1984, Vol. 106. 123.
- [3] Design Method for Subsonic and Transonic Cascade with Prescribed Mach Number Distribution. O.Leonard, R.Braembussche. s.l. : ASME, 1991, Vols. Paper 91-GT-18.
- [4] Inverse Design of Compressor and Turbine Blades at Transonic Flow Condition. O.Leonard, R.Braembussche. s.l. : ASME, 1992, Vols. Paper 92-GT-430.
- [5] Development of a 3D NAvier Stokes Solver for Application to all Types of Turbomachinery. W.Dawes. s.l. : ASME, 1988, Vols. Paper 91-GT-18.
- [6] Turbine Airfoil Design Optimization. S. Geol, H.Singh. s.l. : ASME, 1996, Vols. Paper 96-GT-158.
- [7] Constraned Shape Optimization of Airfoil Cascades using a Navier stokes Solver and a Genetic/SQP Algorthm. B. Dennis, G. Dulikravich. s.l. : ASME, 1999, Vols. Paper 99-GT-441.
- [8] H.Hoeijmakers. Panel methods for aerodynamic analysis.
- [9] Subsonic Potential aerodynamics for complex configuration: A general theory. L. Morino, C. Kuo. s.l. : AIAA Journal, 1974, Vols. 12,NO.2.
- [10] Steady and Oscillatory Subsonic and supersonic aerodynamics around complex configuration: A general theory. s.l. : AIAA Journal, 1975, Vol. 13 NO.3.
- [11] Overset Field-Panel Method for Unsteady Transonic Aerodynamic Influence Coefficient Matrix Generation. Chen.p, Gao.X. s.l. : AIAA, 2004, Vol. 1512.
- [12] Development and Analysis of Panel Method for Propellers in Unsteady Flow. Hsin.C. s.l. : Uni. of MIT, PHD. Thesis, 1990.
- [13] A wind turbine blade profile analysis code based on the singularities method. B. Kamoun, D. Afungchui, A. Chauvin. s.l. : Renewable Energy, 2005, Vols. 30 (2005) 339–352.

- [14] Dossing, M. Vortex Lattice Modelling of Winglets on Wind Turbine Blades. s.l. : Wind Energy Department Riso & Department of Mechanical Engineering DTU, 2007. ISSN 0106-2840.
- [15] A potential flow 2-D vortex panel model: Applications to vertical axis straight blade tidal turbine. L.B. Wang, L. Zhang, N.D. Zeng. s.l.: Energy Conversion and Management, 2007, Vols. 48 (2007) 454–461.
- [16] Anderson, John D. Fundamentals of Aerodynamics. s.l. : McGRAW-HILL, 2005.
- [17] Spreiter, J. R. On the application of transonic similarity rules. s.l. : NACA TN 2726, 1952.
- [18] E.L. Houghton, P.W. Carpenter. Aerodynamics for Engineering Students. s.l. : Butterworth-Heinemann - Fifth edition, 2003.
- [19] Chu, L.C. Integral equation solution of the full potential equation for three-dimensional, steady, transonic wing flows. s.l. : Old Dominion uni ,Dep. of Mechanical Eng. PHD Theses, 1988.
- [20] Katz, J, Low-speed Aerodynamics From Wing Theory to Panel Methods. New York : McGraw-Hill,Inc, 1991.
- [21] Panel Methods--An Introduction . Erickson, Larry L. s.l. : NASA TP 299, 1990.
- [22] Development of a shock-fitting field-panel method for 3D transonic flows . Hu, H. s.l. : Journal Computational Mechanics, 1994.
- [23] Field panel method with grid stretching technique for solving transonic potential flow around arbitrary airfoils. H. Zhang, A. Röttgermann, S. Wagner. s.l. : Journal Computational Mechanics, 1995.
- [24] A Field-Panel Approach for Transonic FlowCalculations about 3D Configurations. D. Fokin, L. Gebhardt, Th. Lutz, S. Wagner. s.l. : Institute for Aerodynamics and Gas Dynamics, University of Stuttgart, Germany.
- [25] The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four Ewopean Wind Tunnels. R.Kiock, F.Lehthaus, N.Baines, C.Sieverding. s.l. : ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 1985, Vols. 108, pp. 277-284.
- [26] The Panel Method: Its Original Development. Smith, A. M. O. s.l.: Applied Computational aerodynamics, Progress in Aeronautic Sciences, AIAA, 1990, Vol. 125.
- [27] Panel methods for aerodynamic analysis and design. H.Hoeijmakers. s.l. : AGARD-R-783, Paper 5, 1992.
- [28] Mason WH. Applied computational aerodynamics Engineering. Mason, W. s.l. : Department of Aerospace and Ocean Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [29] A.Osama. s.l. Unsteady hybrid vortex technique for transonic vortex flows and flutter application, National Aeronautics and Space Administration Langley Research Center Hampton, 1986, Vol. VA 23665.